MPSI – Colle 11 (12 au 16 décembre 2022) : Nombres réels - Suites

Important !

Pour cette colle, les exercices porteront sur les suites, et sur les relations d'équivalence/ordre (pas d'exo sur le reste du chapitre 10 : borne sup, densité, partie entière)

Chapitre 10 : Nombres réels

1 – Relations d'équivalence et relations d'ordre

Une **relation d'équivalence** est une relation binaire réflexive, symétrique et transitive. Exemples : égalité, congruences modulo p dans $\mathbb{Z}$ (exo 1), relation "$\sim$" sur les suites réelles (exo 4).

Une **relation d'ordre** est une relation binaire réflexive, antisymétrique et transitive. Exemples : "$\leqslant$", divisibilité dans $\mathbb{N}$ (et pas dans $\mathbb{Z}$), inclusion dans $\mathscr{P}(E)$.

Une relation d'ordre R sur E est **totale** si pour tout couple (x, y) d'éléments de E, on a xRy ou yRx. Exemples : la relation "$\leqslant$" dans $\mathbb{R}$ est totale, les relations de divisibilité dans $\mathbb{N}$ et d'inclusion dans $\mathscr{P}(E)$ ne le sont pas.

2 – Propriété de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$

Définition de minorant, majorant, min, max, sup et inf.

Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée possède une borne supérieure. Caractérisation de la borne supérieure.

3 – Densité

Définition. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Caractérisation séquentielle de la densité. Corollaire : tout réel est limite d'une suite de rationnels.

4 – Partie entière

Définition. Propriétés :

1/ $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$

2/ La fonction partie entière est croissante sur $\mathbb{R}$.

Chapitre 11 : Suites réelles et complexes

1 - Généralités sur les suites réelles

Catalogue de définitions : suite **majorée**, **minorée**, **bornée**, **croissante**, **décroissante**, **monotone**, **constante**, **stationnaire**, **périodique**.

L'énoncé ci-dessous, démontré dans le cadre des fonctions, est encore valide pour les suites :

Lemme : u est bornée SSI $\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M$.

2 - Limite d'une suite réelle

Définition : soient u une suite et ℓ un réel. u **converge vers** ℓ (ou a pour limite ℓ) si : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)$.

La suite u diverge si elle n'est pas convergente, c'est-à-dire si elle n'a pas de limite finie.

<u>Exemple</u> : la suite de terme général $1/n$ tend vers 0. La suite de terme général e^n diverge (pas de limite finie), ainsi que celle de terme général $(-1)^n$ (pas de limite du tout).

Lemme : u converge vers ℓ SSI $(u - \ell)$ converge vers 0.

Propriété (unicité de la limite) : si u est une suite convergente, alors sa limite est unique.

Propriété : toute suite convergente est bornée (*si u est une suite convergente, alors u est bornée*).

<u>Remarque</u> : la réciproque de la propriété précédente est évidemment fausse. La suite de terme général $(-1)^n$ est bornée, mais ne converge pas.

Propriétés (algébriques des limites) : soient u et v deux suites, de limites respectives ℓ et ℓ'.

1) $u + v$ converge vers $\ell + \ell'$

2) uv converge vers $\ell\ell'$

3) $1/v$ converge vers $1/\ell'$ (sous réserve que $\ell' \neq 0$)

4) u/v converge vers ℓ/ℓ' (sous réserve que $\ell' \neq 0$)

Corollaire : toute combinaison linéaire de suites convergentes est convergente.

Propriété : si u est bornée, et v converge vers 0, alors uv converge vers 0.

Définition : soit u une suite. u **diverge vers** $+\infty$ (ou a pour limite $+\infty$) si : $\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \geqslant M)$. Et de manière analogue, u **diverge vers** $-\infty$ si : $\forall M < 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \leqslant M)$.

<u>Exemples</u> : la suite de terme général n^2 diverge vers $+\infty$.

Lemme : si u diverge vers $+\infty$, alors $1/u$ existe à partir d'un certain rang et converge vers 0.

3 - Suites REELLES et inégalités

Toutes les suites considérées dans ce pragraphe sont réelles.

3.1 - Limites et inégalités

Propriété : soient u et v deux suites convergentes, de limites respectives ℓ et ℓ'. Si $u \leqslant v$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \leqslant \ell'$.

Théorème (de comparaison) : soient u et v deux suites telles que :

- à partir d'un certain rang : $u \leqslant v \quad$ (*resp.* $u \geqslant v$)
- $\lim u = +\infty \quad$ (*resp.* $-\infty$)

Alors $\lim v = +\infty \quad$ (*resp.* $-\infty$).

Application : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right] = +\infty$.

Théorème (d'encadrement ou "des gendarmes") : soient u, v et w trois suites telles que :

- à partir d'un certain rang : $u \leqslant v \leqslant w$
- u et w sont convergentes
- $\lim u = \lim w$

Alors v converge et $\lim v = \lim u = \lim w$.

Application : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 t^{2n+1} \arctan(t)\, \mathrm{d}t = 0$.

3.2 - Limites et monotonie

Théorème (de la limite monotone) : toute suite croissante et majorée converge. Toute suite décroissante et minorée converge.

Application : la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est convergente (vers $\pi^2/6$).

Définition : deux suites u et v sont **adjacentes** si :

- u et v sont monotones, de monotonies opposées
- $\lim (v-u) = 0$

Théorème (des suites adjacentes) : deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

Application. Densité de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition : soient x un réel et n un entier naturel. On appelle **approximation décimale de x à 10^{-n} près** :

- **par défaut** le nombre décimal $u_n = \dfrac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n}$;
- **par excès** le nombre décimal $v_n = \dfrac{\lfloor 10^n x\rfloor + 1}{10^n}$.

Propriété : avec les notations introduites ci-dessus ; les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, et convergent vers x. On a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n} = x \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor 10^n x\rfloor + 1}{10^n} = x.$$

Il résulte de cette propriété que tout réel est limite d'une suite de décimaux. D'où (caractérisation séquentielle de la densité) :

Corollaire : $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Questions de cours

- **Relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$**. La relation "$\sim$" est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (ex 4 de la feuille 10).
- **Propriété (limite d'une somme)** : soient u et v deux suites, de limites respectives ℓ et ℓ'. Alors $u+v$ converge vers $\ell + \ell'$.
- **Propriété** : si u est bornée, et v converge vers 0, alors uv converge vers 0 **ET** application : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} \arctan(n) = 0$.
- **Théorème d'encadrement ou "des gendarmes" ET** application : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 (1-t)^{2n+1} \sin(t)\mathrm{d}t = 0$.
- **Application du théorème de comparaison** : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{\mathrm{e}^n} = +\infty$.

Les 2 questions suivantes sont sur le principe du volontariat

- **Congruences dans $\mathbb{Z}$**. La relation de congruence modulo p est une relation d'équivalence, compatible avec la somme et le produit.
- **Théorème** : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.