Mathématiques — Cahier de vacances de Noël 2022

Exercice 1 — Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\pi/4} \cos(ax)\cos(bx)\,\mathrm{d}x \qquad I_2 = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{1+x}\sin(2x)\,\mathrm{d}x \qquad I_3 = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^4}$$

(a et b réels)

Exercice 2 — **Etude d'une suite.** Soient a un réel strictement positif, et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^3 + 3ax}{3x^2 + a}$$

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1/ Etablir que l'équation $f(x) = x$ admet exactement trois racines réelles, que l'on précisera.

2/ Pour tout réel x, on pose : $g(x) = f(x) - x$. Etudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

3/ Etablir que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{3\,[h(x)]^2}{(3x^2 + a)^2}$$

où h est une fonction polynomiale que l'on explicitera.

4/ Déterminer le sens de variation de f. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

5/ Dans cette question, on suppose que $u_0 > \sqrt{a}$.

a/ Etablir que : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n > \sqrt{a}$.

b/ Etablir que la suite (u_n) est convergente, et préciser sa limite.

Exercice 3 — **Nombres réels.** On note $\mathbb{Q} + \mathrm{i}\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres complexes dont les parties réelles et imaginaires sont rationnelles, càd :

$$\mathbb{Q} + \mathrm{i}\mathbb{Q} = \{a + \mathrm{i}\,b \,/\, (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$$

Montrer que tout nombre complexe est limite d'une suite d'éléments de $\mathbb{Q} + \mathrm{i}\,\mathbb{Q}$. [*]

Exercice 4 — Pour tout entier naturel n, on note :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{7}}\left[\left(2 + \sqrt{7}\right)^n - \left(2 - \sqrt{7}\right)^n\right]$$

Etablir que pour tout entier naturel n, le réel u_n est un entier naturel.

[*]. Ce résultat signifie que $\mathbb{Q} + \mathrm{i}\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Exercice 5 — Intégrales et suites. On désigne par f une fonction définie et continue sur $[0;1]$ et on considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$I_0 = \int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x, \quad \text{et pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}^\star, \quad I_n = \int_0^1 x^n f(x)\ \mathrm{d}x$$

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour deux fonctions f différentes. *Les questions 1) et 2) sont donc indépendantes.*

1/ Dans cette question, on suppose que f est définie par : $f(x) = \ln(1+x^2)$.

a/ Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel n on a :

$$I_n = \frac{1}{n+1}\left(\ln 2 - 2\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}\ \mathrm{d}x\right)$$

b/ Etablir, pour tout x de $[0;1]$ l'encadrement : $0 \leqslant \dfrac{x^{n+2}}{1+x^2} \leqslant x^{n+2}$.

c/ Montrer que $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = 0$.

d/ Quelle est la limite de nI_n lorsque n tend vers $+\infty$?

2/ Dans cette question, on suppose que f est définie par : $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$.

a/ Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $I_n + I_{n+1} + I_{n+2}$ en fonction de n.

b/ Etudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c/ En déduire, pour tout n supérieur ou égal à 2, l'encadrement : $\dfrac{1}{3(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{3(n-1)}$

d/ Quelle est la limite de nI_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 6 — Système. Déterminer tous les couples de nombres complexes (a,b) tels que :

$$\begin{cases} ab &= 2 \\ a^3+b^3 &= 9 \end{cases}$$

Exercice 7 — Equation différentielle Déterminer toutes les fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et à valeurs réelles telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + f(x) + \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Exercice 8 — Nombres réels. Etablir qu'entre deux nombres rationnels, il existe une infinité de nombres irrationnels (et réciproquement).

Exercice 9 — Bornes supérieures et inférieures (exercice technique). Soient C et D deux parties de $\mathbb{R}$, que l'on suppose majorées.

1/ Etablir que : $[C \subset D] \Longrightarrow [\sup C \leqslant \sup D]$.

2/ a/ Justifier l'existence de $\sup(C \cup D)$.

b/ Déduire de la question précédente que $\max(\sup C, \sup D) \leqslant \sup(C \cup D)$.

c/ Etablir que : $\sup(C \cup D) \leqslant \max(\sup C, \sup D)$. Conclure.

3/ On pose : $C + D = \{c + d \,/\, (c, d) \in C \times D\}$.

a/ Justifier l'existence de $\sup(C + D)$.

b/ Etablir que : $\sup(C + D) = \sup C + \sup D$.