Corrigé du DS de Mathématiques n^{0}6 — 17 décembre 2022

Exercice 1 — **(EDL2)** Déterminer l'ensemble des fonctions de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ solutions de l'équation différentielle (E) suivante :

$$y'' - 2y' - 3y = \cos(x)$$

➤ **Résolution de l'équation homogène associée.** (H) : $y'' - 2y' - 3y = 0$.

L'équation caractéristique associée est (EC) : $r^2 - 2r - 3 = 0$.

(EC) possède deux racines : -1 et 3. D'après le cours, la solution générale de (H) est donc :

$$f_H : x \in \mathbb{R} \longmapsto C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{3x} \quad (C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R}).$$

➤ **Solution particulière de l'équation avec second membre.**

On observe que $\cos(x) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)$, puis on introduit l'équation : (E') $\quad y'' - 2y' - 3y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$.

Puisque i n'est pas racine de l'équation caractéristique, on pose : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_P(x) = K\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ avec K réel.

La fonction f_P est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel x :

$$f_P{}'(x) = \mathrm{i}K\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \text{ puis : } f_P{}''(x) = -K\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$$

Par suite, on a pour tout réel x :

$$f''_P(x) - 2f'_P(x) - 3f_P(x) = K\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\left[-1 - 2\mathrm{i} - 3\right] = -\left(4 + 2\mathrm{i}\right)K\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$$

On en déduit que f_P est solution de (E') si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -\left(4 + 2\mathrm{i}\right)K\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \Longleftrightarrow -\left(4 + 2\mathrm{i}\right)K = 1$$

D'où : $\quad f_P$ est solution de (E') si et seulement si $K = -\dfrac{1}{4 + 2\mathrm{i}}$

En résumé, la fonction définie en posant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_P(x) = -\dfrac{1}{4 + 2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ est solution de (E').

Or pour tout réel x on a :

$$f_P(x) = -\frac{1}{4 + 2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = -\frac{4 - 2\mathrm{i}}{20}\left(\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)\right) = \frac{\mathrm{i} - 2}{10}\left(\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)\right)$$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{Re}\left(f_P(x)\right) = -\dfrac{1}{10}\left(2\cos(x) + \sin(x)\right)$

Conclusion. D'après ce qui précède, la solution générale de (E) est :

$$\boxed{f : x \in \mathbb{R} \longmapsto -\frac{1}{10}\left(2\cos(x) + \sin(x)\right) + C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{3x} \quad (C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R})}$$

Exercice 2 — **(Fonction définie par une intégrale)** Pour tout réel x, on pose :

$$\varphi(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{\cos(t)}\,\mathrm{d}t$$

1/ Montrer que φ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Par construction, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x on a : $\varphi'(x) = \mathrm{e}^{\cos(x)} > 0$.

Conclusion. φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2/ Etudier la parité ou l'imparité éventuelle de la fonction φ.

$\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à zéro, et pour tout réel x on a :

$$\varphi(-x) = \int_0^{-x} \mathrm{e}^{\cos(t)}\mathrm{d}t =_{(ch.\,var:\,u=-t)} -\int_0^x \mathrm{e}^{\cos(u)}\mathrm{d}u = -\varphi(x)$$

Conclusion. φ est impaire

3/ Etudier le signe de φ sur $\mathbb{R}$.

On a $\varphi(0) = 0$, et φ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. On en déduit que φ est positive (*resp.* négative) sur $\mathbb{R}_+$ (*resp.* sur $\mathbb{R}_-$).

4/ Déterminer le développement limité à l'ordre 1 en 0 de φ.

On $\varphi(0) = 0$, et $\varphi'(0) = \mathrm{e}^{\cos(0)} = \mathrm{e}$.

Conclusion. $\forall\, h \in \mathbb{R}, \quad \varphi(h) = \mathrm{e}h + h\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

Exercice 3 — **(Suite d'intégrales)**

On rappelle que les fonctions ch (cosinus hyperbolique) et sh (sinus hyperbolique) vérifient la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1 \qquad (*)$$

Au cours de cet exercice, on pourra utiliser la relation $(*)$ en y faisant simplement référence ; et on ne demande absolument pas de la démontrer.

Partie I — Questions préliminaires

1/ Justifier brièvement que la fonction ch réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers un intervalle J que l'on précisera.

La fonction ch est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathrm{ch}(\mathbb{R}_+)$, et :

$$\mathrm{ch}(\mathbb{R}_+) = \left[\mathrm{ch}(0), \lim_{x\longrightarrow+\infty} \mathrm{ch}(x)\right[\ = [1, +\infty[$$

Conclusion. La fonction ch réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $[1, +\infty[$.

2/ En déduire qu'il existe un unique réel strictement positif α tel que : $\mathrm{ch}\,(\alpha) = \sqrt{2}$ *(on ne demande pas de calculer la valeur exacte de α).*

Le réel $\sqrt{2}$ appartient à $[1, +\infty[$. D'après la question précédente, il admet un unique antécédent α par la fonction ch dans $\mathbb{R}_+$. Puisqu'en outre $\mathrm{ch}(0) \neq \sqrt{2}$, le réel α est non nul.

Conclusion. Il existe un unique réel strictement positif α tel que : $\mathrm{ch}\,(\alpha) = \sqrt{2}$.

3/ Etablir que : $\mathrm{sh}\,(\alpha) = 1$. Puis justifier que la fonction sh prend sur $[0, \alpha]$ des valeurs comprises entre 0 et 1.

Selon l'énoncé : $\mathrm{sh}^2(\alpha) = \mathrm{ch}^2(\alpha) - 1 = \left(\sqrt{2}\right)^2 - 1 = 1$.

D'où : $\mathrm{sh}(\alpha) = \pm 1$. Puisqu'en outre $\alpha > 0$, et que la fonction sh est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que $\mathrm{sh}(\alpha) = 1$.

Par ailleurs, la fonction sh est croissante sur $\mathbb{R}$, donc en particulier croissante sur $[0, \alpha]$. Elle prend donc sur cet intervalle des valeurs comprises entre $\mathrm{sh}(0) = 0$ et $\mathrm{sh}(\alpha) = 1$.

Conclusion. $\mathrm{sh}\,(\alpha) = 1$, et la fonction sh prend sur $[0, \alpha]$ des valeurs comprises entre 0 et 1.

Partie II — Une suite d'intégrales

Jusqu'à la fin de cet exercice, on considère la suite (I_n) définie en posant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^\alpha \operatorname{sh}^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$$

où α est l'unique réel strictement positif (défini dans la question 1-b) tel que : $\operatorname{ch}(\alpha) = \sqrt{2}$.

4/ Justifier brièvement que l'intégrale I_n est positive pour tout entier naturel n.

La fonction sh est positive sur $[0, \alpha]$; donc la fonction $t \longmapsto \operatorname{sh}^{2n}(t)$ est positive sur $[0, \alpha]$ pour tout entier naturel n. La propriété de positivité de l'intégrale permet de conclure.

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_n \geqslant 0$.

5/ Etablir que la suite (I_n) est décroissante.

Soit n un entier naturel. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^\alpha \operatorname{sh}^{2n+2}(t) - \operatorname{sh}^{2n}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\alpha \operatorname{sh}^{2n}(t)\left(\operatorname{sh}^2(t) - 1\right)\,\mathrm{d}t$$

Puisque la fonction sh prend sur $[0, \alpha]$ des valeurs comprises entre 0 et 1, on a :

$$\forall\, t \in [0, \alpha], \quad \operatorname{sh}^2(t) - 1 \leqslant 0 \ \wedge\ \operatorname{sh}^{2n}(t) \geqslant 0$$

On en déduit que : $\forall\, t \in [0, \alpha], \quad \operatorname{sh}^{2n}(t)\left(\operatorname{sh}^2(t) - 1\right) \leqslant 0$.msk
Par positivité de l'intégrale, on en déduit que : $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.

L'entier naturel n étant arbitraire dans le raisonnement précédent, on a : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.

Conclusion. La suite (I_n) est décroissante.

6/ Etablir que la suite (I_n) est convergente.

La suite (I_n) est décroissante (question précédente) et minorée (par 0, selon la question 4. Le théorème de la limite monotone permet de conclure.

Conclusion. La suite (I_n) est convergente.

7/ A l'aide d'une intégration par parties, et en observant que $\mathrm{sh}^{2n+2} = \mathrm{sh}^{2n+1} \times \mathrm{sh}$, établir que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+1} = \mathrm{ch}\,(\alpha) - (2n+1)\,(I_{n+1} + I_n)$$

Soit n un entier naturel. On a : $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^\alpha \mathrm{sh}^{2n+2}(t)\,\mathrm{d}t$.

Pour tout réel t on pose :

$$\left\{\begin{array}{l} u(t) = \mathrm{ch}(t) \\ \\ v(t) = \mathrm{sh}2n+1(t) \end{array}\right. \qquad \text{d'où :} \qquad \left\{\begin{array}{l} u'(t) = \mathrm{sh}(t) \\ \\ v'(t) = (2n+1)\mathrm{ch}(t)\mathrm{sh}^{2n}(t) \end{array}\right.$$

Selon les théorèmes généraux, les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \alpha]$. La formule d'intégration par parties permet alors d'écrire :

$$I_{n+1} = \left[\mathrm{ch}(t)\mathrm{sh}^{2n+1}(t)\right]_0^1 - (2n+1)\int_0^\alpha \mathrm{ch}^2(t)\mathrm{sh}^{2n}(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{ch}(\alpha) - (2n+1)\int_0^\alpha \left(1+\mathrm{sh}^2(t)\right)\mathrm{sh}^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$$

Or, par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^\alpha \left(1+\mathrm{sh}^2(t)\right)\mathrm{sh}^{2n}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\alpha \mathrm{sh}^{2n}(t) + \mathrm{sh}^{2n+2}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\alpha \mathrm{sh}^{2n}(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^\alpha \mathrm{sh}^{2n+2}(t)\,\mathrm{d}t = I_n + I_{n+1}$$

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+1} = \mathrm{ch}\,(\alpha) - (2n+1)\,(I_{n+1} + I_n)$

8/ En déduire que : $\qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2n+2} - \dfrac{2n+1}{2n+2}\,I_n$

Soit n un entier naturel. D'après la question précédente, et par définition du réel α on a :

$$I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+1)\,I_{n+1} - (2n+1)I_n$$

D'où : $(2n+2)I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+1)\,I_n$. **Conclusion.** $\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2n+2} - \dfrac{2n+1}{2n+2}\,I_n$

9/ Quelle est la limite de la suite (I_n) ?

La suite (I_n) est convergente d'après la question 6 ; notons ℓ sa limite.

D'après la propriété fondamentale des suites extraites : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_{n+1} = \ell$.

On en déduit, avec la question précédente que :

$$\ell = \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2}}{2n+2}\right) - \ell \qquad \text{d'où :} \quad 2\ell = 0 \text{ et donc } \ell = 0$$

Conclusion. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice 4 — (Développement asymptotique de la série harmonique)

On définit la suite réelle (u_n) en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Partie I — Quelques propriétés de la suite (u_n)

1/ Etablir que la suite (u_n) est croissante.

Pour tout entier naturel non nul n on a : $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} \geqslant 0$

Conclusion. La suite (u_n) est croissante.

2/ Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2n} - u_n \geqslant \frac{1}{2}$$

Soit n un entier naturel non nul. On a :

$$u_{2n} - u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

Or pour tout entier k dans $[\![\, n+1, 2n \,]\!]$, on a : $\dfrac{1}{k} \geqslant \dfrac{1}{2n}$. On en déduit que :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n}$$

Or : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$. D'où : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2}$.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2n} - u_n \geqslant \dfrac{1}{2}$

3/ En raisonnant par l'absurde, en déduire que (u_n) ne peut pas admettre de limite finie.

Par l'absurde supposons que (u_n) admette une limite finie ℓ. Selon la propriété fondamentale des suites extraites : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = 0$.

D'après la question précédente, on aurait alors : $\ell - \ell \geqslant \dfrac{1}{2}$, soit $0 \geqslant \dfrac{1}{2}$. Contradiction.

Conclusion. (u_n) ne peut pas admettre de limite finie.

4/ Justifier que (u_n) n'est pas majorée.

La suite (u_n) est croissante d'après la question 1 ; si de plus elle était majorée, alors elle convergerait selon le théorème de la limite monotone. Or la suite (u_n) n'admet pas de limite finie d'après la question précédente ; elle ne peut donc pas être majorée.

Conclusion. (u_n) n'est pas majorée.

5/ Déduire des questions précédentes la limite de (u_n).

La suite (u_n) est croissante et n'est pas majorée.

Conclusion. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Partie II — Un développement asymptotique de (u_n)

On introduit à présent deux suites réelles (a_n) et (b_n) en posant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n = u_n - \ln(n+1) \qquad \text{et} \qquad b_n = u_n - \ln(n)$$

Dans la suite de l'exercice, on pourra utiliser en cas de besoin la relation suivante, que l'on ne demande pas de démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

6/ Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

➤ **Etude de la monotonie de (a_n).** Pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$a_{n+1} - a_n = u_{n+1} - \ln(n+2) - u_n + \ln(n+1) = u_{n+1} - u_n - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

D'où :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

D'après l'indication donnée dans l'énoncé, on en déduit que : $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$.

Ainsi : (a_n) est croissante (♠)

➤ **Etude de la monotonie de (b_n).** Pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$b_{n+1} - b_n = u_{n+1} - \ln(n+1) - u_n + \ln(n) = u_{n+1} - u_n - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

D'où :

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

D'après l'indication donnée dans l'énoncé, on en déduit que : $b_{n+1} - b_n \leqslant 0$.

Ainsi : (b_n) est décroissante $(\clubsuit)$

➤ **Distance entre (a_n) et (b_n).** Pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$b_n - a_n = u_n - \ln(n) - u_n + \ln(n+1) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = 0 \quad (\heartsuit)$

Conclusion. D'après $(\spadesuit)$, $(\clubsuit)$ et $(\heartsuit)$, les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

Dans la suite de l'exercice, on notera γ la limite* commune à (a_n) et (b_n). Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \gamma \qquad \textbf{\textit{et}} \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = \gamma$$

7/ A l'aide de la question précédente, établir que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n \qquad \text{avec : } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$$

D'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $b_n = u_n - \ln(n)$ (énoncé). D'autre part : $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \gamma$.

On peut donc judicieusement écrire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \ln(n) + \gamma + u_n - \ln(n) - \gamma = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n \qquad \text{avec} \quad \varepsilon_n = u_n - \ln(n) - \gamma$$

Puisque $\varepsilon_n = b_n - \gamma$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n \qquad$ avec : $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$

*. Le symbole "γ" est une lettre minuscule de l'alphabet grec (c'est un "gamma").

8/ **Application**. Déterminer la limite suivante : $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On a :

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_{n-1}$$

Selon la question précédente, on a donc pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$u_{2n} - u_{n+1} = \ln(2n) + \gamma + \varepsilon_{2n} - (\ln(n-1) + \gamma + \varepsilon_{n-1}) \text{ avec : } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$$

D'où :

$$u_{2n} - u_{n-1} = \ln\left(\frac{2n}{n-1}\right) + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_{n-1} \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0 \text{ (et donc : } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_{2n} = \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_{n-1} = 0)$$

En observant que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{2n}{n-1}\right) = \ln(2)$, on en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{2n} - u_{n-1}) = \ln(2)$.

Conclusion. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \ln(2)$

Soit, avec des petits points : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \ln(2)$

Exercice 5 — **(Suite de Fibonacci)**

Dans cet exercice, on considère la suite (F_n) définie en posant :

$$\mathrm{F}_0 = 0\,; \qquad \mathrm{F}_1 = 1\,; \qquad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n$$

Partie I — Quelques propriétés de la suite de Fibonacci

1/ A l'aide d'une récurrence double, établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{F}_n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout entier naturel non nul n, notons $P(n)$ l'assertion : $\mathrm{F}_n \in \mathbb{N}^*$.

➤ **Initialisation**. Puisque $\mathrm{F}_1 = \mathrm{F}_2 = 1$, $P(1)$ et $P(2)$ sont vraies.

➤ **Hérédité**. Supposons $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies pour un certain entier naturel non nul n.

Selon l'énoncé : $\mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n$, et par hypothèse de récurrence, F_{n+1} et F_n sont dans $\mathbb{N}^*$.

On en déduit que $\mathrm{F}_{n+2} \in \mathbb{N}^*$, ce qui signifie que $P(n+2)$ est vraie. Ce qui achève la preuve de l'hérédité.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{F}_n \in \mathbb{N}^*$

2/ Etablir que la suite (F_n) est strictement croissante à partir du rang 2, c'est à dire :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}\,,\ \mathrm{F}_{n+1} > \mathrm{F}_n$$

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Selon l'énoncé : $\mathrm{F}_{n+1} = \mathrm{F}_n + \mathrm{F}_{n-1}$.

Puisque $(n-1) \in \mathbb{N}^*$, on a d'après la question précédente : $\mathrm{F}_{n-1} \in \mathbb{N}^*$. En particulier : $\mathrm{F}_{n-1} > 0$.

Par conséquent : $\mathrm{F}_{n+1} - \mathrm{F}_n > 0$.

En résumé, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a : $\mathrm{F}_{n+1} - \mathrm{F}_n > 0$.

Conclusion. La suite (F_n) est strictement croissante à partir du rang 2.

3/ Déterminer l'expression du terme général F_n en fonction de n.

La suite (F_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

L'équation caractéristique qui lui est associée est $X^2 - X - 1 = 0$. Elle possède deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.†

Conclusion intermédiaire. $\exists\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{F}_n = \lambda \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

De plus, selon l'énoncé :

$$\begin{cases} \mathrm{F}_0 = 0 \\ \mathrm{F}_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda\,\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + \mu\,\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = -\lambda \\ \lambda\left((1+\sqrt{5}) - (1-\sqrt{5})\right) = 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mu = -\lambda \\ \sqrt{5}\,\lambda = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = -\lambda \\ \lambda = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = -\dfrac{\sqrt{5}}{5} \\ \lambda = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{F}_n = \dfrac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

†. Le réel x_1 est le célèbre *nombre d'or*, souvent noté φ ; et $x_2 = -1/\varphi$ (puisque le produit $x_1 x_2$ vaut -1).

Partie II — F-décomposition d'un entier ‡

Le but de cette partie est de montrer que tout nombre entier naturel non nul peut s'écrire, de manière unique, comme une somme de certains termes de la suite de Fibonacci.

➣ Si n est un entier naturel non nul, on dit que n **admet une F-décomposition** s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ et des entiers naturels k_1, $k_2, \ldots, k_p$ supérieurs ou égaux à 2 tels que :

(a) $\forall i \in [\![1, p-1]\!]$, $k_{i+1} - k_i > 1$, ce qui traduit que les nombres F_{k_i} et $F_{k_{i+1}}$ ne sont pas des termes consécutifs de la suite de Fibonacci ;

(b) $n = F_{k_1} + F_{k_2} + \cdots + F_{k_p}$

Si $p = 1$, on adopte la convention que la proposition **(a)** est vérifiée.

L'écriture $n = F_{k_1} + F_{k_2} + \cdots + F_{k_p}$, si elle existe, est alors appelée une **F-décomposition** de l'entier n.

➣ Les 12 premiers termes de la suite de Fibonacci sont :

$F_0 = 0$; $F_1 = 1$; $F_2 = 1$; $F_3 = 2$; $F_4 = 3$; $F_5 = 5$; $F_6 = 8$; $F_7 = 13$;

$F_8 = 21$; $F_9 = 34$; $F_{10} = 55$; $F_{11} = 89$

4/ Justifier que l'écriture $100 = 3 + 8 + 89$ est une F-décomposition de 100 ;

et que l'écriture $100 = 3 + 8 + 34 + 55$ n'est pas une F-décomposition de 100.

On a : $100 = 3 + 8 + 89 = F_4 + F_6 + F_{11}$. C'est une F-décomposition de 100, puisque F_4 et F_6 sont des termes non-consécutifs de la suite de Fibonacci, tout comme F_6 et F_{11}.

Par ailleurs : $100 = 3 + 8 + 34 + 55 = F_4 + F_6 + F_9 + F_{10}$. Ce n'est pas une F-décomposition de 100, puisque F_9 et F_{10} sont 2 termes consécutifs de la suite de Fibonacci.

Conclusion. $100 = 3 + 8 + 89$ est une F-décomposition de 100 ; et $100 = 3 + 8 + 34 + 55$ n'est pas une F-décomposition de 100.

5/ On suppose qu'un entier n admet une F-décomposition de la forme $n = F_{k_1} + F_{k_2} + \cdots + F_{k_p}$. Montrer, par récurrence sur p, que : $F_{k_p} \leqslant n < F_{k_p+1}$.

Notons $A(p)$ l'assertion : "Si n admet une F-décomposition de la forme $n = F_{k_1} + F_{k_2} + \cdots + F_{k_p}$, alors $F_{k_p} \leqslant n < F_{k_p+1}$".

➤ **Initialisation** ($p = 1$). Alors : $n = F_{k_1}$. En particulier : $F_{k_1} \leqslant n$ et $n < F_{k_1+1}$ puisque la suite (F_n) est strictement croissante.

D'où : si $n = F_{k_1}$, alors $F_{k_1} \leqslant n < F_{k_1+1}$. Ainsi $A(1)$ est vraie.

‡. Cette partie est de couleur "orange vif"...

➤ **Hérédité**. Supposons $A(p)$ vraie pour un certain entier naturel non nul p.

Soit n un entier s'écrivant : $n = \mathrm{F}_{k_1} + \mathrm{F}_{k_2} + \cdots + \mathrm{F}_{k_p} + \mathrm{F}_{k_{p+1}}$.

On a alors : $\mathrm{F}_{k_{p+1}} \leqslant n$ (puisque les F_k sont des entiers naturels non nuls).

Notons : $m = \mathrm{F}_{k_1} + \mathrm{F}_{k_2} + \cdots + \mathrm{F}_{k_p}$. On a par hypothèse de récurrence :

$$\mathrm{F}_{k_p} \leqslant m < \mathrm{F}_{k_p+1}$$

En particulier : $m < \mathrm{F}_{k_p+1}$. Donc : $n < \mathrm{F}_{k_{p+1}} + \mathrm{F}_{k_p+1}$.

Or : $\mathrm{F}_{k_p+1} \leqslant \mathrm{F}_{k_{p+1}-1}$ car F_{k_p} et $\mathrm{F}_{k_{p+1}}$ ne sont pas consécutifs.

D'où : $n < \mathrm{F}_{k_{p+1}} + \mathrm{F}_{k_{p+1}-1} = \mathrm{F}_{k_{p+1}+1}$.

Ainsi : $\mathrm{F}_{k_{p+1}} \leqslant n < \mathrm{F}_{k_{p+1}+1}$.

En résumé : $\left[n = \mathrm{F}_{k_1} + \mathrm{F}_{k_2} + \cdots + \mathrm{F}_{k_p} + \mathrm{F}_{k_{p+1}}\right] \Longrightarrow \left[\mathrm{F}_{k_{p+1}} \leqslant n < \mathrm{F}_{k_{p+1}+1}\right]$. Ce qui signifie que $A(p+1)$ est vraie, et prouve l'hérédité de la propriété.

Conclusion. Si n admet une F-décomposition $n = \mathrm{F}_{k_1} + \mathrm{F}_{k_2} + \cdots + \mathrm{F}_{k_p}$, alors : $\mathrm{F}_{k_p} \leqslant n < \mathrm{F}_{k_p+1}$.

6/ En déduire que, sous réserve d'existence, la F-décomposition de n est unique.

Supposons à nouveau l'existence d'une F-décomposition pour n ; notons F_{k_p} le plus grand terme de cette décomposition, et prouvons par récurrence sur p l'unicité de la décomposition.

➤ **Initialisation** ($p = 1$). Alors : $n = \mathrm{F}_{k_1}$ et cette décomposition à 1 terme est unique, waouh.

➤ **Hérédité**. Supposons la propriété vraie pour un certain entier naturel non nul p.

Soit n un entier naturel admettant une F-décomposition comportant $(p+1)$ termes. Notons $\mathrm{F}_{k_{p+1}}$ et $\mathrm{F}_{m_{p+1}}$ deux $(p+1)$-èmes termes éventuellement différents.

D'après la question précédente :

$$\mathrm{F}_{k_{p+1}} \leqslant n < \mathrm{F}_{k_{p+1}+1} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{F}_{m_{p+1}} \leqslant n < \mathrm{F}_{m_{p+1}+1}$$

Ce qui implique : $\mathrm{F}_{k_{p+1}} = \mathrm{F}_{m_{p+1}}$ (la suite (F_n) étant strictement croissante, l'entier n ne peut appartenir qu'à un unique intervalle $[\mathrm{F}_N, \mathrm{F}_{N+1}[\,$).

Il reste à observer que $n - \mathrm{F}_{k_{p+1}}$ possède une F-décomposition à p termes, qui est unique par hypothèse de récurrence, pour conclure : si n est un entier naturel admettant une F-décomposition comportant $(p+1)$ termes, alors cette décomposition est unique.

Conclusion. Si n admet une F-décomposition, alors elle est unique.

7/ Montrer que tout entier naturel non nul n admet une unique F-décomposition.

Remarque : au cours de la démonstration, on pourra admettre que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{F}_n = +\infty$.

Selon l'énoncé : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists k \geqslant 2,\ n \leqslant \mathrm{F}_k$.

Prouvons par récurrence sur l'entier $k \geqslant 2$ que tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $n \leqslant \mathrm{F}_k$ admet une F-décomposition.

L'initialisation est immédiate puisqu'il existe un unique entier naturel n non nul tel que $n \leqslant \mathrm{F}_2$, qui est $n = 1 = \mathrm{F}_2$.

Passons à l'hérédité : supposons que pour un certain entier $k \geqslant 2$, tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $n \leqslant \mathrm{F}_k$ admet une F-décomposition.

Soit alors n un entier non nul tel que : $n \leqslant \mathrm{F}_{k+1}$.

Si n est $\leqslant \mathrm{F}_k$ ou si $n = \mathrm{F}_{k+1}$, alors n admet une F-décomposition.

Reste donc le cas où : $\mathrm{F}_k < n < \mathrm{F}_{k+1}$.

Alors : $0 < n - \mathrm{F}_k < \mathrm{F}_{k+1} - \mathrm{F}_k$. Or : $\mathrm{F}_{k+1} - \mathrm{F}_k = \mathrm{F}_{k-1}$. Donc : $0 < n - \mathrm{F}_k < \mathrm{F}_{k-1}$.

En particulier : $0 < n - \mathrm{F}_k < \mathrm{F}_k$. Par hypothèse de récurrence, $n - \mathrm{F}_k$ admet une F-décomposition, donc n admet une F-décomposition, ce qui prouve l'hérédité.

Conclusion. Tout entier naturel non nul n admet une F-décomposition, unique d'après la question 6.