Devoir surveillé de Mathématiques n^{0}6 — 17 décembre 2022

Durée : 3 heures — Calculatrices interdites

Tous les résultats doivent être encadrés ou soulignés

Exercice 1 — **(EDL2)** Déterminer l'ensemble des fonctions de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ solutions de l'équation différentielle (E) suivante :

$$y'' - 2y' - 3y = \cos(x)$$

Exercice 2 — **(Fonction définie par une intégrale)** Pour tout réel x, on pose :

$$\varphi(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{\cos(t)}\,\mathrm{d}t$$

1/ Montrer que φ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2/ Etudier la parité ou l'imparité éventuelle de la fonction φ.

3/ Etudier le signe de φ sur $\mathbb{R}$.

4/ Déterminer le développement limité à l'ordre 1 en 0 de φ.

Exercice 3 — **(Suite d'intégrales)**
On rappelle que les fonctions ch (cosinus hyperbolique) et sh (sinus hyperbolique) vérifient la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1 \qquad (*)$$

Au cours de cet exercice, on pourra utiliser la relation $(*)$ en y faisant simplement référence ; et on ne demande absolument pas de la démontrer.

Partie I — Questions préliminaires

1/ Justifier brièvement que la fonction ch réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers un intervalle J que l'on précisera.

2/ En déduire qu'il existe un unique réel strictement positif α tel que : $\mathrm{ch}\,(\alpha) = \sqrt{2}$ *(on ne demande pas de calculer la valeur exacte de α).*

3/ Etablir que : $\mathrm{sh}\,(\alpha) = 1$. Puis justifier que la fonction sh prend sur $[0, \alpha]$ des valeurs comprises entre 0 et 1.

Partie II — Une suite d'intégrales

Jusqu'à la fin de cet exercice, on considère la suite (I_n) définie en posant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{\alpha} \mathrm{sh}^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$$

où α est l'unique réel strictement positif (défini dans la question 1-b) tel que : $\mathrm{ch}(\alpha) = \sqrt{2}$.

4/ Justifier brièvement que l'intégrale I_n est positive pour tout entier naturel n.

5/ Etablir que la suite (I_n) est décroissante.

6/ Etablir que la suite (I_n) est convergente.

7/ A l'aide d'une intégration par parties, et en observant que $\mathrm{sh}^{2n+2} = \mathrm{sh}^{2n+1} \times \mathrm{sh}$, établir que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+1} = \mathrm{ch}\,(\alpha) - (2n+1)\,(I_{n+1} + I_n)$$

8/ En déduire que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+2} - \frac{2n+1}{2n+2}\, I_n$$

9/ Quelle est la limite de la suite (I_n) ?

Exercice 4 — (Développement asymptotique de la série harmonique)

On définit la suite réelle (u_n) en posant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Partie I — Quelques propriétés de la suite (u_n)

1/ Etablir que la suite (u_n) est croissante.

2/ Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2n} - u_n \geqslant \frac{1}{2}$$

3/ En raisonnant par l'absurde, en déduire que (u_n) ne peut pas admettre de limite finie.

4/ Justifier que (u_n) n'est pas majorée.

5/ Déduire des questions précédentes la limite de (u_n).

Partie II — Un développement asymptotique de (u_n)

On introduit à présent deux suites réelles (a_n) et (b_n) en posant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n = u_n - \ln(n+1) \qquad \text{et} \qquad b_n = u_n - \ln(n)$$

Dans la suite de l'exercice, on pourra utiliser en cas de besoin la relation suivante, que l'on ne demande pas de démontrer :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

6/ Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

Dans la suite de l'exercice, on notera γ la limite* commune à (a_n) et (b_n). Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \gamma \qquad \textbf{\textit{et}} \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = \gamma$$

7/ A l'aide de la question précédente, établir que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n \qquad \text{avec : } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$$

8/ **Application**. Déterminer la limite suivante : $\qquad \ell = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$

EXERCICE 5 — **(SUITE DE FIBONACCI)**

Dans cet exercice, on considère la suite (F_n) définie en posant :

$$\mathrm{F}_0 = 0\,; \qquad \mathrm{F}_1 = 1\,; \qquad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n$$

Partie I — Quelques propriétés de la suite de Fibonacci

1/ A l'aide d'une récurrence double, établir que : $\qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{F}_n \in \mathbb{N}^*$.

2/ Etablir que la suite (F_n) est strictement croissante à partir du rang 2, c'est à dire :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\},\ \mathrm{F}_{n+1} > \mathrm{F}_n$$

3/ Déterminer l'expression du terme général F_n en fonction de n.

*. Le symbole "γ" est une lettre minuscule de l'alphabet grec (c'est un "gamma").

Partie II — F-décomposition d'un entier †

Le but de cette partie est de montrer que tout nombre entier naturel non nul peut s'écrire, de manière unique, comme une somme de certains termes de la suite de Fibonacci.

➢ Si n est un entier naturel non nul, on dit que n **admet une F-décomposition** s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ et des entiers naturels k_1, k_2,…, k_p supérieurs ou égaux à 2 tels que :

(a) $\forall\, i \in [\![\, 1, p-1 \,]\!],\ k_{i+1} - k_i > 1$, ce qui traduit que les nombres F_{k_i} et $\mathrm{F}_{k_{i+1}}$ ne sont pas des termes consécutifs de la suite de Fibonacci ;

(b) $n = \mathrm{F}_{k_1} + \mathrm{F}_{k_2} + \cdots + \mathrm{F}_{k_p}$

Si $p = 1$, on adopte la convention que la proposition **(a)** est vérifiée.

L'écriture $n = \mathrm{F}_{k_1} + \mathrm{F}_{k_2} + \cdots + \mathrm{F}_{k_p}$, si elle existe, est alors appelée une **F-décomposition** de l'entier n.

➢ Les 12 premiers termes de la suite de Fibonacci sont :

$\mathrm{F}_0 = 0$; $\mathrm{F}_1 = 1$; $\mathrm{F}_2 = 1$; $\mathrm{F}_3 = 2$; $\mathrm{F}_4 = 3$; $\mathrm{F}_5 = 5$; $\mathrm{F}_6 = 8$; $\mathrm{F}_7 = 13$;

$\mathrm{F}_8 = 21$; $\mathrm{F}_9 = 34$; $\mathrm{F}_{10} = 55$; $\mathrm{F}_{11} = 89$

4/ Justifier que l'écriture $100 = 3 + 8 + 89$ est une F-décomposition de 100 ;

et que l'écriture $100 = 3 + 8 + 34 + 55$ n'est pas une F-décomposition de 100.

5/ On suppose qu'un entier n admet une F-décomposition de la forme $n = \mathrm{F}_{k_1} + \mathrm{F}_{k_2} + \cdots + \mathrm{F}_{k_p}$. Montrer, par récurrence sur p, que : $\mathrm{F}_{k_p} \leqslant n < \mathrm{F}_{k_p+1}$.

6/ En déduire que, sous réserve d'existence, la F-décomposition de n est unique.

7/ Montrer que tout entier naturel non nul n admet une unique F-décomposition.

Remarque : au cours de la démonstration, on pourra admettre que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{F}_n = +\infty$.

Barème indicatif : Exercice 1 : 4pts — Exercice 2 : 5pts — Exercice 3 : 12pts (7+5)

Exercice 4 : 11pts (6+5) — Exercice 5 : 12pts (5+7)

†. Cette partie est de couleur "orange vif"…