Mathématiques — Cahier de vacances de Noël 2022 — Corrigé

Exercice 1 — Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\pi/4} \cos(ax)\cos(bx)\,\mathrm{d}x \quad (a \text{ et } b \text{ réels}) \qquad I_2 = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{1+x}\sin(2x)\,\mathrm{d}x \qquad I_3 = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^4}$$

Eléments de correction

Pour I_1, il suffit d'observer que : $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right)$.

Pour I_2, on peut observer dans un premier temps que : $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{1+x}\sin(2x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{x}\sin(2x)\,\mathrm{d}x$;

puis dans un second temps que : $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{x}\sin(2x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})x}\,\mathrm{d}x\right)$.

Le calcul de I_3 peut se faire directement : la fonction à intégrer est en effet "de la forme $u' \times u^{\alpha}$".

Exercice 2 — **Etude d'une suite.** Soient a un réel strictement positif, et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^3+3ax}{3x^2+a}$$

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1/ Etablir que l'équation $f(x) = x$ admet exactement trois racines réelles, que l'on précisera.

2/ Pour tout réel x, on pose : $g(x) = f(x) - x$. Etudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

3/ Etablir que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{3\left[h(x)\right]^2}{\left(3x^2+a\right)^2}$$

où h est une fonction polynomiale que l'on explicitera.

4/ Déterminer le sens de variation de f. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

5/ Dans cette question, on suppose que $u_0 > \sqrt{a}$.

a/ Etablir que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > \sqrt{a}$.

b/ Etablir que la suite (u_n) est convergente, et préciser sa limite.

Corrigé

Soient a un réel strictement positif, et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^3 + 3ax}{3x^2 + a}$$

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1/ Soit x un réel. On a :

$$[f(x) = x] \Longleftrightarrow \left[\frac{x^3 + 3ax}{3x^2 + a} = x\right] \Longleftrightarrow \left[\frac{x^3 + 3ax - 3x^3 - ax}{3x^2 + a} = 0\right] \Longleftrightarrow \left[2\left(ax - x^3\right) = 0\right]$$

$$\Longleftrightarrow \left[x = 0 \ \vee \ x = \sqrt{a} \ \vee \ x = -\sqrt{a}\right]$$

Conclusion. L'équation $f(x) = x$ possède exactement trois racines réelles : 0, $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

2/ Soit x un réel. D'après les calculs de la question précédente, le réel $f(x) - x$ est du signe de $2\left(ax - x^3\right)$, c'est à dire du signe de : $x\left(a - x^2\right)$. On en déduit le tableau de signes de l'expression $f(x) - x$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{a}$		0		$\sqrt{a}$		$+\infty$
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

3/ Par ailleurs, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, selon les théorèmes généraux. En particulier, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x on a :

$$f'(x) = \frac{3\left(x^2 + a\right)\left(3x^2 + a\right) - 6x\left(x^3 + 3ax\right)}{\left(3x^2 + a\right)^2}$$

Il s'ensuit que le réel $f'(x)$ est du signe de son numérateur $N(x)$. Or :

$$N(x) = 9x^4 + 12ax^2 + 3a^2 - 6x^4 - 18ax^2 = 3\left(x^4 - 2ax^2 + a^2\right) = 3\left(x^2 + a\right)^2$$

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{3\left(x^2 + a\right)^2}{\left(3x^2 + a\right)^2}$

4/ D'après la question précédente, pour tout réel x, le réel $f'(x)$ est strictement positif.

Conclusion. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par suite, (u_n) est monotone.

5/ Supposons que $u_0 > \sqrt{a}$.

a/ Notons $P(n)$ l'assertion "$u_n > \sqrt{a}$" pour tout entier naturel n.

L'assertion $P(0)$ est vraie de par notre hypothèse.

Supposons à présent que $P(n)$ est vraie pour un certain entier naturel n. Alors : $u_n > \sqrt{a}$. Puisque la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $f(u_n) > f(\sqrt{a})$, c'est à dire : $u_{n+1} > \sqrt{a}$. Récurrence établie.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > \sqrt{a}$

b/ Puisque $u_0 > \sqrt{a}$, on a : $f(u_0) - u_0 < 0$ (d'après la question 2). On en déduit que $u_1 < u_0$. Puisque la suite (u_n) est monotone (question 4), on en déduit que (u_n) est décroissante.

Comme de plus (u_n) est minorée (par $\sqrt{a}$, d'après la question précédente), le théorème de la limite monotone permet d'affirmer qu'elle converge.

La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, la limite ℓ de (u_n) est une solution de l'équation $f(x) = x$, c'est à dire : $-\sqrt{a}$, 0 ou $\sqrt{a}$. La suite (u_n) étant minorée par $\sqrt{a}$, on en déduit que $\ell = \sqrt{a}$.

Conclusion. (u_n) est convergente, et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{a}$.

Exercice 3 — Nombres réels. On note $\mathbb{Q} + \mathrm{i}\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres complexes dont les parties réelles et imaginaires sont rationnelles, càd :

$$\mathbb{Q} + \mathrm{i}\mathbb{Q} = \{a + \mathrm{i}\, b \,/\, (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$$

Montrer que tout nombre complexe est limite d'une suite d'éléments de $\mathbb{Q} + \mathrm{i}\,\mathbb{Q}$.[*]

Corrigé

Soit $z \in \mathbb{Q} + \mathrm{i}\mathbb{Q}$. Il existe deux réels x et y tels que : $z = x + \mathrm{i}\, y$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ de nombres rationnels convergeant vers x et y respectivement. D'après la propriété intitulée "pont $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{C}$" pour les suites, la suite de terme général $x_n + \mathrm{i}\, y_n$ converge vers z.

Conclusion. Tout nombre complexe est limite d'une suite d'éléments de $\mathbb{Q} + \mathrm{i}\,\mathbb{Q}$.

∗. Ce résultat signifie que $\mathbb{Q} + \mathrm{i}\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Exercice 4 — Pour tout entier naturel n, on note :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{7}}\left[\left(2+\sqrt{7}\right)^n - \left(2-\sqrt{7}\right)^n\right]$$

Etablir que pour tout entier naturel n, le réel u_n est un entier naturel.

Corrigé

Les réels $\left(2+\sqrt{7}\right)$ et $\left(2-\sqrt{7}\right)$, dont les somme et produit sont respectivement égaux à 4 et -3, sont les deux racines de l'équation $x^2 - 4x - 3 = 0$. Il s'ensuit que u_n est le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2, satisfaisant la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} + 3u_n$.

De plus, d'après l'énoncé : $u_0 = 0$ et $u_1 = 2$.

Montrons à présent que pour tout entier naturel n, le terme u_n est dans $\mathbb{N}$, par récurrence double. A cette fin, on note $P(n)$ l'assertion "$u_n \in \mathbb{N}$".

➤ Initialisation. Puisque $u_0 = 0$ et $u_1 = 2$, les propriétés $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.

➤ Hérédité. Supposons les propriétés $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies pour un certain entier naturel n. Alors u_n et u_{n+1} sont entiers naturels, et il s'ensuit que $u_{n+2} = 4u_{n+1} + 3u_n$ est lui aussi entier naturel. Ce qui assure que la propriété $P(n+2)$ est vraie, établit l'hérédité, et achève la preuve de cette récurrence double pas bien méchante.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{\sqrt{7}}\left[\left(2+\sqrt{7}\right)^n - \left(2-\sqrt{7}\right)^n\right] \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 — **Intégrales et suites.** On désigne par f une fonction définie et continue sur $[0;1]$ et on considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$I_0 = \int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x, \quad \text{et pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}^\star, \quad I_n = \int_0^1 x^n f(x)\ \mathrm{d}x$$

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour deux fonctions f différentes. *Les questions 1) et 2) sont donc indépendantes.*

1/ Dans cette question, on suppose que f est définie par : $f(x) = \ln(1+x^2)$.

a/ Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel n on a :

$$I_n = \frac{1}{n+1}\left(\ln 2 - 2\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}\ \mathrm{d}x\right)$$

b/ Etablir, pour tout x de $[0;1]$ l'encadrement : $0 \leqslant \dfrac{x^{n+2}}{1+x^2} \leqslant x^{n+2}$.

c/ Montrer que $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = 0$.

d/ Quelle est la limite de nI_n lorsque n tend vers $+\infty$?

2/ Dans cette question, on suppose que f est définie par : $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$.

a/ Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $I_n + I_{n+1} + I_{n+2}$ en fonction de n.

b/ Etudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c/ En déduire, pour tout n supérieur ou égal à 2, l'encadrement : $\dfrac{1}{3(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{3(n-1)}$

d/ Quelle est la limite de nI_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Eléments de correction

1/ a/ Dans cette question, on a : $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln\left(1+x^2\right)\,\mathrm{d}x$. La réponse provient d'une IPP réalisée en dérivant $\ln(1+x^2)$.

b/ Immédiat.

c/ On intègre l'encadrement de la question précédente, puis on applique le théorème des gendarmes.

d/ La limite de nI_n lorsque n tend vers $+\infty$ est $\ln(2)$, essentiellement d'après les questions 1-a et 1-c.

2/ a/ $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$.

b/ La suite (I_n) est décroissante (il suffit de montrer que $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$ pour tout n).

c/ D'après 2-a : $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$. Et d'après $2-b$: $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} \leqslant 3I_n$.

On en déduit que : $\dfrac{1}{3(n+1)} \leqslant I_n$.

L'autre inégalité s'obtient de manière analogue, en considérant $I_n + I_{n-1} + I_{n-2}\ldots$

d/ D'après la question précédente et le théorème des gendarmes, la limite de nI_n lorsque n tend vers $+\infty$ est $\dfrac{1}{3}$.

Exercice 6 — Système. Déterminer tous les couples de nombres complexes (a,b) tels que :

$$\begin{cases} ab &= 2 \\ a^3+b^3 &= 9 \end{cases}$$

Corrigé

Si un couple (a,b) est solution du système, alors† : $\begin{cases} a^3b^3 &= 8 \\ a^3+b^3 &= 9 \end{cases}$

†. Attention ! On a seulement une implication ici.

On connaît ainsi la somme et le produit de a^3 et b^3 ; on peut alors affirmer que ces deux complexes sont solutions de l'équation $X^2 - 9X + 8 = 0$.[‡] Les racines de cette équation du second degré possède comme racines 1 et 8.[§]

On en déduit que : $\begin{cases} a^3 & = & 1 \\ b^3 & = & 8 \end{cases} \vee \begin{cases} a^3 & = & 8 \\ b^3 & = & 1 \end{cases}$ soit encore : $\begin{cases} a & = & 1, \mathrm{j}, \text{ ou } \bar{\mathrm{j}} \\ b & = & 2, 2\mathrm{j}, \text{ ou } 2\bar{\mathrm{j}} \end{cases} \vee \begin{cases} a & = & 2, 2\mathrm{j}, \text{ ou } 2\bar{\mathrm{j}} \\ b & = & 1, \mathrm{j}, \text{ ou } \bar{\mathrm{j}} \end{cases}$

En résumé, on a établi que pour un couple (a, b) de nombres complexes :

$$[(a,b) \text{ est solution du système}] \Longrightarrow \left[\begin{cases} a & = & 1, \mathrm{j}, \text{ ou } \bar{\mathrm{j}} \\ b & = & 2, 2\mathrm{j}, \text{ ou } 2\bar{\mathrm{j}} \end{cases} \vee \begin{cases} a & = & 2, 2\mathrm{j}, \text{ ou } 2\bar{\mathrm{j}} \\ b & = & 1, \mathrm{j}, \text{ ou } \bar{\mathrm{j}} \end{cases} \right]$$

Mais, quitte à insister lourdement, on n'a ici qu'une implication, et pas une équivalence. Les couples solutions du système sont donc à rechercher parmi les 18 couples candidats (obtenus en donnant à a et b toutes les valeurs autorisées par les équations précédentes).

Finalement, l'équation $ab = 2$ permet de conclure et d'affirmer que le système (S) possède exactement 6 couples solutions : $(1, 2), (\mathrm{j}, 2\bar{\mathrm{j}}), (\bar{\mathrm{j}}, 2\mathrm{j}), (2, 1), (2\bar{\mathrm{j}}, \mathrm{j}), (2\mathrm{j}, \bar{\mathrm{j}})$.

Exercice 7 — Equation différentielle Déterminer toutes les fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$ et à valeurs réelles telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + f(x) + \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Corrigé

➤ Soit f une fonction solution du problème. Alors f est solution d'une équation différentielle de la forme : $y' + y = C$, où $C = -\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ est une constante réelle. La solution générale de cette équation différentielle est particulièrement facile à obtenir, et on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = C + \lambda \mathrm{e}^{-x}$, avec C et λ réels.

A ce point du raisonnement, on a donc établi que :

$$[f \text{ est solution du problème}] \Longrightarrow \left[\exists\ (C, \lambda \in \mathbb{R}^2), \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = C + \lambda \mathrm{e}^{-x}\right]$$

➤ Reste donc à étudier la réciproque de l'implication précédente, et à déterminer à quelle condition sur C et λ la fonction f est effectivement solution du problème.

Supposons donc que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = C + \lambda \mathrm{e}^{-x}$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (théorèmes généraux) et on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\lambda \mathrm{e}^{-x}$. En outre : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 C + \lambda \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = C + \lambda \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^1 = C + \lambda\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right)$.

On déduit de ces calculs que :

‡. On utilise ici la propriété suivant laquelle deux complexes z_1 et z_2 sont solutions de l'équation $X^2 - SX + P = 0$, où $S = z_1 + z_2$ et $P = z_1 z_2$.

§. 1 est racine évidente, et le produit des racines vaut "c/a", càd 8 dans le cas présent.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + f(x) + \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$
$$\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad -\lambda \mathrm{e}^{-x} + C + \lambda \mathrm{e}^{-x} + C + \lambda\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) = 0$$
$$\Longleftrightarrow 2C + \lambda\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) = 0 \Longleftrightarrow C = \frac{\mathrm{e}^{-1} - 1}{2}\,\lambda$$

Conclusion. L'ensemble des fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et à valeurs réelles telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + f(x) + \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

est l'ensemble des fonctions f telles que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-1} - 1}{2}\,\lambda + \lambda \mathrm{e}^{-x}$$

Exercice 8 — Nombres réels Etablir qu'entre deux nombres rationnels, il existe une infinité de nombres irrationnels (et réciproquement).

Corrigé

➤ Soient x et y deux rationnels (distincts, évidemment). SNALG, on peut supposer $x < y$. Notons $c = (x+y)/2$ le milieu du segment $[x, y]$. Le nombre c est rationnel (c'est la moyenne de deux rationnels). La suite de terme général $u_n = c + \dfrac{\sqrt{2}}{n}$ converge vers c. Il existe donc un entier n_0 tel que : $c < c + \dfrac{\sqrt{2}}{n} < y$. Puisque la suite (u_n) est décroissante, on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N},\ [n \geqslant n_0] \Longrightarrow [c < u_n < y]$.

Puisqu'en outre chacun des réels u_n est irrationnel, on en déduit qu'il existe entre c et y, et donc a fortiori entre x et y, une infinité de nombres irrationnels : les nombres u_n, pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Conclusion. Entre deux rationnels, il existe une infinité d'irrationnels.

➤ Soient x et y deux irrationnels (distincts, évidemment). SNALG, on peut supposer $x < y$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe un rationnel c tel que $x < c < y$.
La suite de terme général $u_n = c + \dfrac{1}{n}$ converge vers c. Il existe donc un entier n_0 tel que : $c < c + \dfrac{1}{n} < y$. Puisque la suite (u_n) est décroissante, on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N},\ [n \geqslant n_0] \Longrightarrow [c < u_n < y]$.

Puisqu'en outre chacun des réels u_n est rationnel (c'est la somme de deux rationnels), on en déduit qu'il existe entre c et y, et donc a fortiori entre x et y, une infinité de nombres rationnels : les nombres u_n, pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Conclusion. Entre deux irrationnels, il existe une infinité de rationnels.

Exercice 9 — Bornes supérieures (et inférieures). Soient C et D deux parties de $\mathbb{R}$, que l'on suppose majorées.

1/ Etablir que : $[C \subset D] \Longrightarrow [\sup C \leqslant \sup D]$.

2/ a/ Justifier l'existence de $\sup(C \cup D)$.

b/ Déduire de la question précédente que $\max(\sup C, \sup D) \leqslant \sup(C \cup D)$.

c/ Etablir que : $\sup(C \cup D) \leqslant \max(\sup C, \sup D)$. Conclure.

3/ On pose : $C + D = \{c + d / \ (c, d) \in C \times D\}$.

a/ Justifier l'existence de $\sup(C + D)$.

b/ Etablir que : $\sup(C + D) = \sup C + \sup D$.

Corrigé

Soient C et D deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. D'après la propriété de la borne supérieure, $\sup C$ et $\sup D$ existent.

1/ Si $C \subset D$. Alors pour tout $c \in C$ on a $c \in D$, donc $c \leqslant \sup D$. Il s'ensuit que $\sup D$ est un majorant de C, donc $\boxed{\sup C \leqslant \sup D}$. ¶

2/ a/ Puisque C et D sont non vides et majorées, alors $C \cup D$ l'est également (par exemple par $\max(\sup C, \sup D)$). D'après la propriété de la borne supérieure, on peut affirmer que $\sup(C \cup D)$ existe.

b/ Puisque $C \subset (C \cup D)$ et $D \subset (C \cup D)$, on a déjà $\sup C \leqslant \sup(C \cup D)$ et $\sup(D) \leqslant \sup(C \cup D)$. Par suite : $\max(\sup C, \sup D) \leqslant \sup(C \cup D)$.

c/ Réciproquement, soit $x \in C \cup D$. Alors $x \leqslant \sup C$ (si $x \in C$) ou $x \leqslant \sup D$ (si $x \in D$).
Donc $x \leqslant \max(\sup C, \sup D)$.
Il s'ensuit que $\max(\sup C, \sup D)$ est un majorant de $C \cup D$, d'où : $\sup(C \cup D) \leqslant \max(\sup C, \sup D)$.

On en déduit finalement que : $\boxed{\sup(C \cup D) = \max(\sup C, \sup D)}$.

3/ a/ Soit x un élément de $C + D$; il existe un couple (c, d) de $C \times D$ tel que $x = c + d$. Puisque $c \leqslant \sup C$ et $d \leqslant \sup D$, on a : $x \leqslant \sup C + \sup D$. Ce raisonnement tenant pour un élément arbitraire de $C + D$, on en déduit que $\sup C + \sup D$ est un majorant de $C + D$; d'où $\boxed{\sup(C + D) \leqslant \sup C + \sup D \quad (\spadesuit)}$.
Il s'ensuit en particulier que $C + D$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, ce qui justifie l'existence de sa borne supérieure.

b/ Soient c et d deux éléments quelconques de C et D respectivement. On a : $c = (c + d) - d$. En particulier : $c \leqslant \sup(C + D) - d$.
On en déduit que pour tout $d \in D$, $\sup(C + D) - d$ est un majorant de C.
D'où : $\sup C \leqslant \sup(C + D) - d$ pour tout $d \in D$. D'où : $\forall d \in D, \ d \leqslant \sup(C + D) - \sup C$.
Par suite $\sup(C + D) - \sup C$ est un majorant de D, donc : $\sup D \leqslant \sup(C + D) - \sup C$.
D'où $\boxed{\sup C + \sup D \leqslant \sup(C + D) \quad (\clubsuit)}$

Conclusion : on déduit de $(\spadesuit)$ et de $(\clubsuit)$ que : $\sup(C + D) = \sup C + \sup D$

¶. La réflexion puissante derrière ce raisonnement est qu'un majorant quelconque est supérieur ou égal au plus petit d'entre eux.