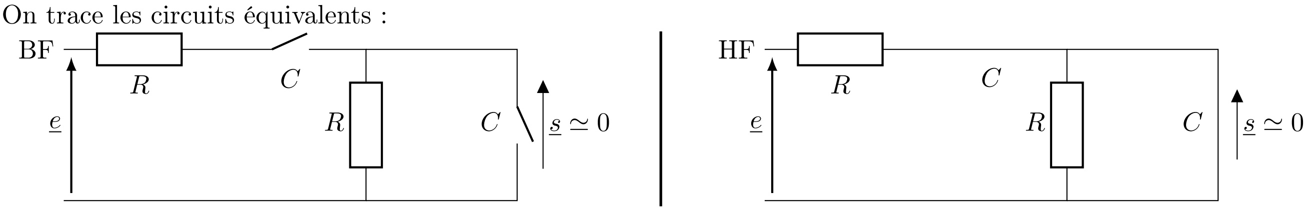
# DS4 du 25/11 : Physique-chimie (2h)

## Solution de l'exercice 1 : Filtre de Wien

**Q.1** On trace les circuits équivalents :




C'est un filtre passe-bande.

**Q.2** Calculons $\dfrac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = \dfrac{1}{R} + jC\omega$ et appliquons le pont diviseur de tension :

$$\underline{s} = \frac{\underline{Z}_{\text{eq}}}{R + \dfrac{1}{jC\omega} + \underline{Z}_{\text{eq}}}\underline{e} \Longrightarrow \underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\underline{Z}_{\text{eq}}}{R + \dfrac{1}{jC\omega} + \underline{Z}_{\text{eq}}} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}}\left(R + \dfrac{1}{jC\omega}\right)}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{3 + j\left(RC\omega - \dfrac{1}{RC\omega}\right)} \Longleftrightarrow \underline{H} = \frac{1/3}{1 + j\dfrac{1}{3}\left(RC\omega - \dfrac{1}{RC\omega}\right)}$$

On identifie alors $H_0 = \dfrac{1}{3}$, $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$ et $Q = \dfrac{1}{3}$.

**Q.3** Soit $G_{\text{dB}} = 20\log(|\underline{H}|) = 20\log\left(\dfrac{H_0}{1 + Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}\right)$

$$\varphi = \arg(\underline{H}) = -\arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$$

En BF : $\omega \ll \omega_0$

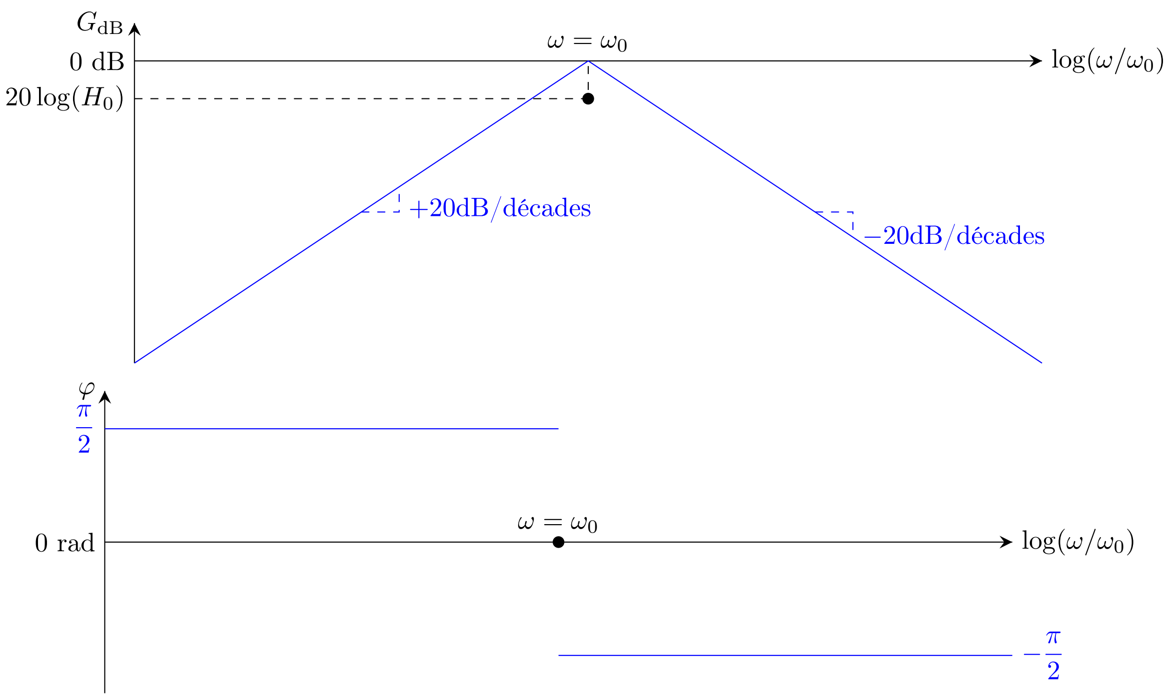
$$G_{\text{dB}} \simeq \cancel{20\log\left(\frac{H_0}{Q}\right)} + 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \Longrightarrow G_{\text{dB}} \simeq +20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \qquad \varphi \simeq +\frac{\pi}{2}$$

En HF : $\omega \gg \omega_0$

$$G_{\text{dB}} \simeq \cancel{20\log\left(\frac{H_0}{Q}\right)} - 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \Longrightarrow G_{\text{dB}} \simeq -20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \qquad \varphi \simeq -\frac{\pi}{2}$$

En $\omega = \omega_0$ : $G_{\text{dB}} = 20\log(H_0) \simeq -9{,}54\,\text{dB}$ et $\varphi = 0$

On trace le diagramme de Bode asymptotique :



**Q.4** Cherchons $\omega_1$ et $\omega_2$ les deux pulsations de coupure tel que la bande passante soit définit par $\omega \in [\omega_1;\omega_2]$ qui vérifie :

$$|\underline{H}|(\omega) \geqslant \frac{H_0}{\sqrt{2}}$$

On cherche donc $\omega_1$ et $\omega_2$ solution de l'équation : $|\underline{H}|(\omega_c) \geqslant \dfrac{H_0}{\sqrt{2}}$

$$Q^2\left(\frac{\omega_c}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega_c}\right)^2 = 1 \Longrightarrow \begin{cases} Q\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega_1}\right) = -1 \\ Q\left(\dfrac{\omega_2}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega_2}\right) = -1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} Q\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2 - \dfrac{\omega_1}{\omega_0} - Q = 0 \\ Q\left(\dfrac{\omega_2}{\omega_0}\right)^2 - \dfrac{\omega_2}{\omega_0} - Q = 0 \end{cases}$$

On calcul le discriminant commun : $\Delta = 1 + 4Q^2 > 0 \quad \forall Q > 0$

$$\omega_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0\sqrt{1+4Q^2}}{2Q} \qquad \omega_2 = +\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0\sqrt{1+4Q^2}}{2Q}$$

On obtient alors une largeur de bande passante $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \dfrac{\omega_0}{2Q}$

**Q.5** On pose $e(t) = e_1(t) + e_2(t) + e_3(t)$ avec $\underline{e}_1 = E_m e^{j\omega t}$, $\underline{e}_2 = E_m e^{j10\omega t}$ et $\underline{e}_3 = E_m e^{j100\omega t}$ tel que

$$e(t) = \mathscr{R}e\left(\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3\right)$$

On pose $s(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t)$ avec $\underline{s}_1 = \underline{H}(\omega)E_m e^{j\omega t}$, $\underline{s}_2 = \underline{H}(10\omega)E_m e^{j10\omega t}$ et $\underline{s}_3 = \underline{H}(100\omega)E_m e^{j100\omega t}$ où

$$s(t) = \mathscr{R}e\left(\underline{s}_1 + \underline{s}_2 + \underline{s}_3\right)$$

Calculons alors $\underline{s}_1$, $\underline{s}_2$ et $\underline{s}_3$ avec $\omega/\omega_0 = 1/10$ :

$$\underline{s}_1 = \frac{1/3}{1 + j\frac{1}{3}\left(\frac{1}{10} - 10\right)} E_m e^{\omega t} \simeq \frac{E_m}{\sqrt{3^2+10^2}} e^{j(\omega t + \arctan(10/3))}$$

$$\underline{s}_2 = \frac{1/3}{1 + j\frac{1}{3}(1-1)} E_m e^{10\omega t} = \frac{E_m}{3} e^{j(10\omega t}$$

$$\underline{s}_3 = \frac{1/3}{1 + j\frac{1}{3}\left(1 - \frac{10}{1}\right)} E_m e^{100\omega t} \simeq \frac{E_m}{\sqrt{3^2+10^2}} e^{j(100\omega t - \arctan(10/3))}$$

On calcule alors la partie réelle et on obtient :

$$s(t) = \frac{E_m}{\sqrt{109}}\cos(\omega t + \arctan(10/3)) + \frac{E_m}{3}\cos(\omega t) + \frac{E_m}{\sqrt{109}}\cos(\omega t - \arctan(10/3))$$

## Solution de l'exercice 2 : Le microscope classique

**Q.1** Les conditions de Gauss sont :

1. Les rayons lumineux sont peu inclinés par rapport à l'axe optique.
2. Les rayons lumineux sont proches de l'axe optique.

**Q.2** Soit la grandeur algébrique $\Delta = \overline{F_1'F_2}$, on a la relation suivante :

$$\overline{O_1O_2} = \overline{O_1F_1'} + \overline{F_1'F_2} + \overline{F_2O_2} = f_1' + \Delta + f_2' = D_0 \tag{1}$$

On a alors la relation suivante : $\boxed{\Delta = D_0 - f_1' - f_2'}$. AN : $\Delta = 40\,\mathrm{mm}$.

**Q.3** Pour être vu au repos par l'œil, l'image définitive $A'B'$ doit être située à l'infini.

**Q.4** Pour former une image définitive à l'infini, on : $A_1B_1 \longrightarrow A'_\infty B'_\infty$ donc l'image intermédiaire doit être dans le plan focal objet de l'oculaire.

On a alors $A_1 = F_2$ et $B$ qui est dans le plan focal objet de la lentille numéro deux.

**Q.5** Soit $\overline{OA} = -d$. L'image de $A$ à travers $L_1$ donne $A_1 = F_2$. On utilise alors la relation de conjugaison de Newton de $L_1$ :

$$\overline{F_1A} \times \overline{F_1'A_1} = -(f_1')^2 \Longrightarrow (\overline{F_1O} + \overline{OA}) \times \overline{F_1'F_2} = -(f_1')^2 \Longrightarrow (f_1' - d) \times \Delta = -(f_1')^2$$

On obtient alors l'expression de $d$ : $\boxed{d = \dfrac{(f_1')^2}{\Delta} + f_1'}$. AN : $d \approx 12{,}5\,\mathrm{mm}$.

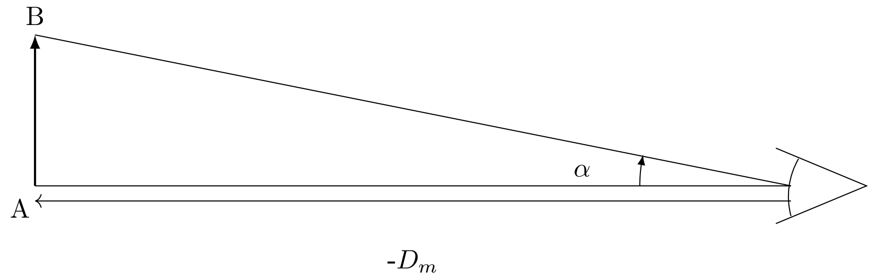
**Q.6** Soit la relation du grandissement $\gamma_1$ de l'objectif. On a $\gamma_1 = \dfrac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} = \dfrac{f_1' + \Delta}{-d}$ On a donc $\boxed{\gamma_1 = -\dfrac{\Delta}{f_1'}}$.

On a l'application numérique suivante : $\underline{\text{AN} : \gamma_1 = -4}$.

**Q.7** Le grossissement angulaire est défini comme : $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$

Avec $\alpha'$ le diamètre apparent de l'image définitive, et $\alpha$ le diamètre apparent de l'objet vu sans le microscope.

Le diamètre apparent $\alpha$ d'un objet vu à une distance fini correspond au diamètre apparent maximum qu'on peut avoir à l'œil nu d'un objet en le voyant net. Cela correspond au diamètre apparent d'un objet vu à une distance minimum qui correspond au P.P.



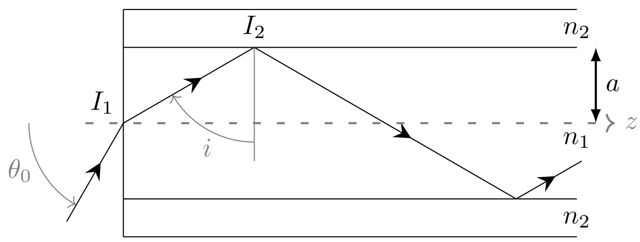

Dans les conditions de Gauss, on a $\alpha \ll 1$ et $\alpha' \ll 1$ on a donc d'après le schéma sur le document Annexe : $\tan(\alpha') = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{-f_2'} \approx \alpha'$. D'après le schéma de la question précédente, on a $\tan(\alpha) = \dfrac{\overline{AB}}{-D_m} \approx \alpha$.

On a alors : $G = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} \dfrac{D_m}{f_2'} = \gamma_1 \dfrac{D_m}{f_2'}$. On obtient donc : $\boxed{G = -\dfrac{\Delta D_m}{f_1' f_2'}}$.

L'application numérique donne : $\underline{\text{AN} : G = -40}$

## Solution de l'exercice 3 : Transmission optique

**Q.1** Soit en $I_2$, on veut que le rayon soit guidé dans le cœur donc une réflexion totale, comme $n_2 < n_1$ il existe un angle $ß_c$ tel que :




$$n_1 \sin(i_c) = n_2$$

$$\boxed{i_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)}$$

Alors pour $i \geqslant i_c$ on a une réflexion totale en $I_2$

On cherche la relation entre $i$ et $\theta$

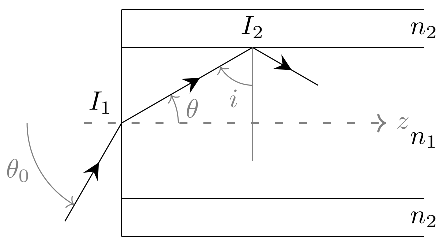
$$i + \theta + \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - i$$

Comme $i > i_c$ :

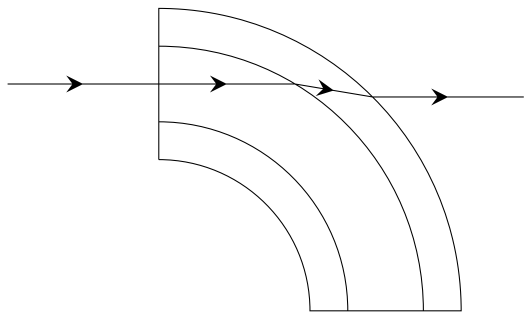
$$\theta < \theta_c = \frac{\pi}{2} - i_c$$

$$\boxed{\theta_c = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)}$$




**Q.2** Si la fibre se courbe trop, le risque est qu'il y ait un point où les rayons pénètrent dans la gaine. On a alors une perte importante d'intensité lumineuse.

On schématise ici un rayon pénétrant la fibre selon son axe de révolution et passant sur une portion présentant une courbure de rayon $R$. Le rayon est alors réfracté dans la gaine qui peut quitter la fibre.



**Q.3** On calcule $ON = n_1 \sin(\theta_c) = n_1 \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - i_c\right) = n_1 \cos(i_c) = n_1 \sqrt{1 - \sin^2(i_c)}$ $\boxed{ON = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$

**Q.4** Soit $n_1 = n_2 + \delta n$ : $ON = \sqrt{(n_2+\delta n)^2 - n_2^2} = n_2\sqrt{(1+\epsilon)^2 - 1}$ avec $\epsilon = \dfrac{\delta n}{n_2}$

$$ON \simeq n_2\sqrt{1+2\epsilon-1} \Longrightarrow \boxed{ON \simeq \sqrt{2n_2\delta n}}$$

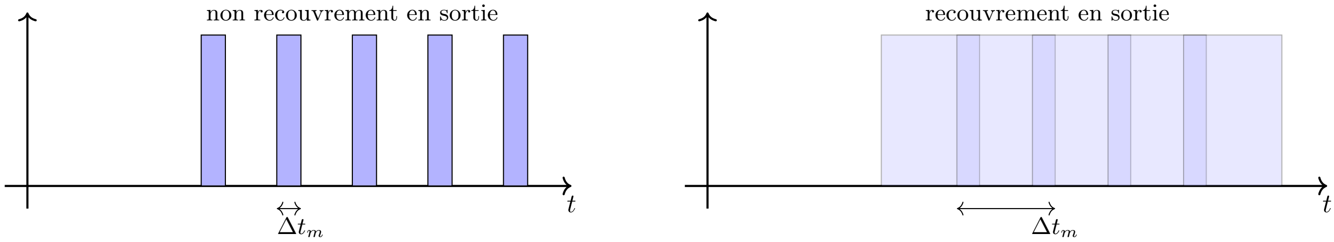
**Q.5** AN : $ON = 0{,}3$

**Q.6** La rayon se propage dans la fibre à la condition que $\boxed{\sin(\theta_0) < ON}$.

**Q.7** Tout se passe comme si le rayon incliné parcourait l'hypoténuse d'un triangle rectangle dans lequel le côté adjacent à l'angle $\theta_c$ est de longueur $L$. La longueur parcourue vaut $\dfrac{L}{\cos\theta_c}$.

D'où la différence de temps de parcours : $\Delta t_m = \dfrac{n_1 L}{c}\left(\dfrac{1}{\cos\theta_c} - 1\right) = \dfrac{n_1 L}{c}\dfrac{n_1 - n_2}{n_2}$.

**Q.8** Chaque impulsion initiale s'étale pour donner un pavé de taille $\Delta t_m$.

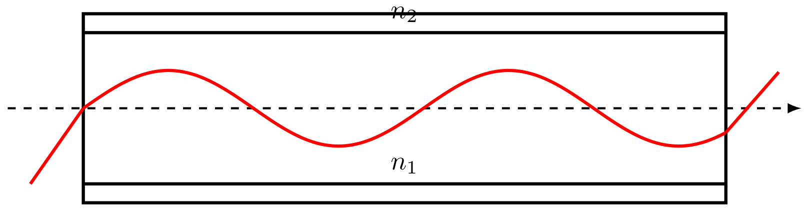



**Q.9** La valeur minimale de la période vaut $\Delta t_m$ donc la fréquence à ne pas dépasser sous peine de mélange infâme est $BP_m = 1/\Delta t_m = \dfrac{c}{n_1 L}\dfrac{n_2}{n_1 - n_2}$.

**Q.10** A.N. Pour $L = 10\,\mathrm{m}$, $BP_m \simeq 1\,\mathrm{GHz}$. Pour $L = 1\,\mathrm{km}$, $BP_m \simeq 0{,}01\,\mathrm{GHz}$.

C'est ennuyeux pour les très longues distances de communication : le débit diminue dramatiquement.

**Q.11** Pour ramener les rayons lumineux vers l'axe, il faut que $n(r)$ soit une fonction décroissante de $r$. Le dessin suivant montre l'allure d'un rayon dans une fibre à gradient d'indice :




**Q.12** Il y a un étalement car les vitesses de propagation dépendent de l'indice même si la longueur parcourue est la même : le **chemin optique** change.

$\cdots$ **FIN** $\cdots$