

## CB1 du 15/01 : Physique (Durée : 4h)

### Solution de l'exercice 1 : Filtre linéaire d'ordre 1 et pH-métrie

**Q.1** Il faut utiliser un filtre passe-bas de fréquence de coupure  $f_c$  faible devant 4 Hz afin de conserver la composante continue et supprimer le signal sinusoïdal de fréquence 4 Hz.

**Q.2** Schéma électrique équivalent en BF :

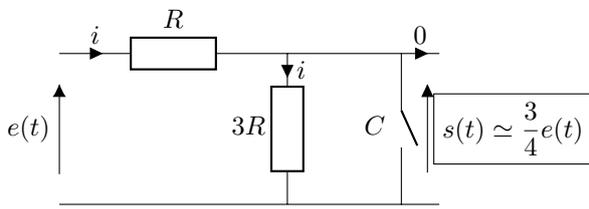
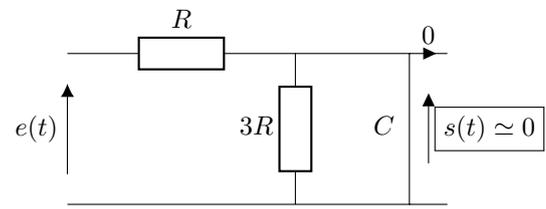


Schéma électrique équivalent en HF :



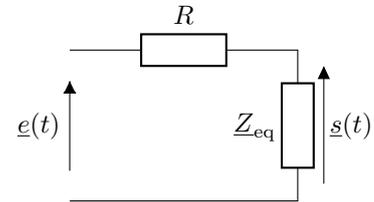
Conclusion : le quadripôle étudié est un filtre passe-bas.

**Q.3** Schéma équivalent en RSF avec :  $\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{3R} = j\omega C + \frac{1}{3R}$  L'impédance complexe équivalente.

Pont diviseur de tension en RSF :

$$s(t) = \frac{Z_{eq}}{Z_{eq} + R} e(t) = \frac{1}{1 + \frac{R}{Z_{eq}}} e(t) = \frac{e}{1 + \frac{1}{\frac{3}{4} + jRC\omega}} = \frac{3/4}{1 + j\frac{3RC}{4}\omega} e$$

Par définition :  $H(j\omega) = \frac{s(t)}{e(t)} = \frac{3/4}{1 + j\frac{3RC}{4}\omega}$



On identifie alors :  $H_0 = \frac{3}{4}$  le gain nominal (en BF),  $\omega_0 = \frac{4}{3RC}$  la pulsation propre du filtre.

Soit avec  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  la pulsation réduite :  $H(jx) = \frac{H_0}{1 + jx}$

**Q.4** On en déduit alors :  $G(x) = |H(jx)| = \frac{H_0}{\sqrt{1+x^2}}$   
 $\Phi(x) = \arg(H(jx)) = -\arg(1+jx) = -\arctan(x)$

**Q.5** La pulsation de coupure  $\omega_c$  est définie par  $G(x = x_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$  avec ici :  $G(x = x_c) = \frac{H_0}{\sqrt{1+x_c^2}}$   
 $G_{max} = H_0 = G(x = 0)$

On résout alors :  $\frac{1}{\sqrt{1+x_c^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies x_c = 1 = \frac{\omega_c}{\omega_0}$  d'où  $\omega_c = \omega_0 = \frac{4}{3RC}$ .

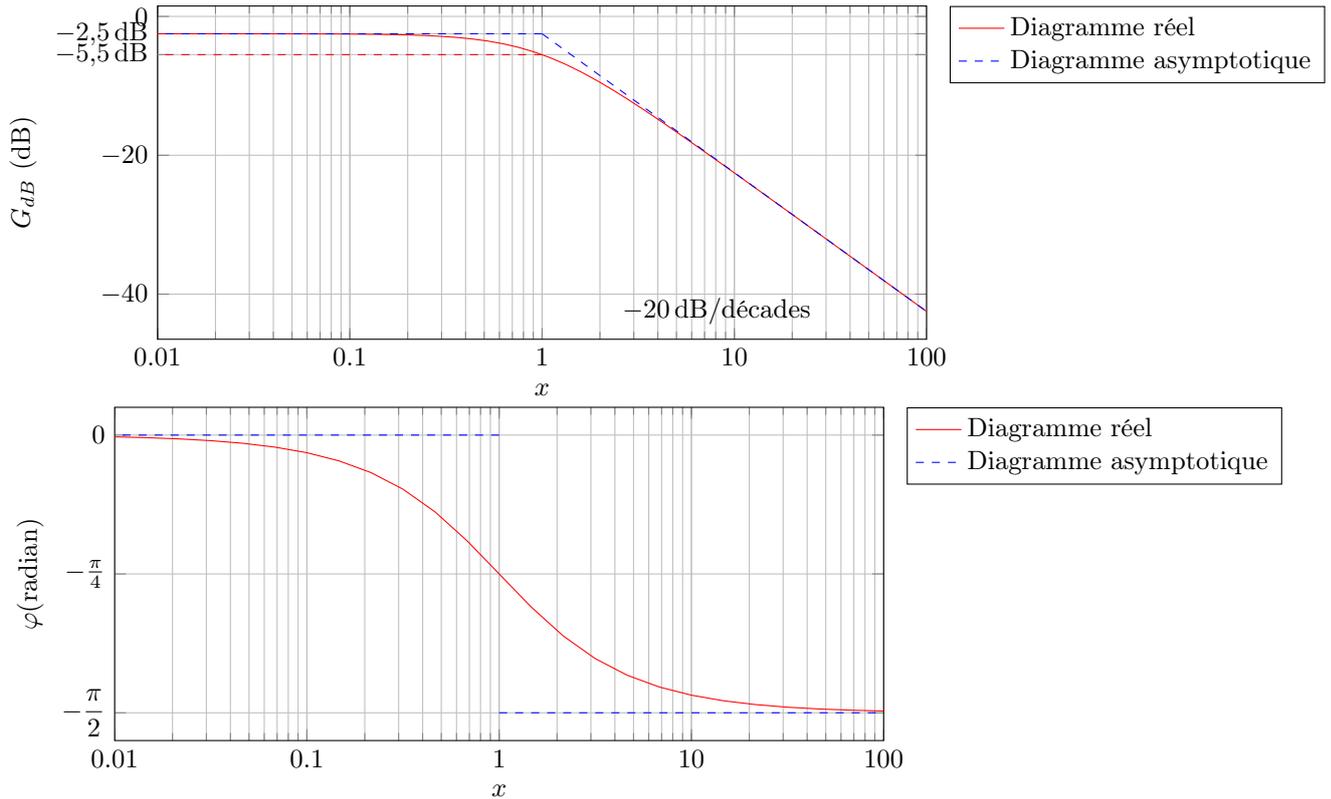
On en déduit alors la fréquence de coupure  $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{2}{3\pi RC}$ , AN :  $f_c = 0,40$  Hz

dix fois plus faible que la fréquence du signal parasite que l'on veut éliminer  $\rightarrow$  valeur satisfaisante.

**Q.6** Tableau des équivalents de  $H(jx)$  qui donne les équations des asymptotes :

	$H(jx) = \frac{H_0}{1+jx}$	$G(x)$	$G_{dB}(x)$	$\Phi(x)$
BF $x \ll 1$	$\simeq H_0 = \frac{3}{4}$	$\simeq H_0 \frac{3}{4}$	$\simeq 20 \log(H_0) \simeq -2,5$ dB	$\simeq 0$
HF $x \gg 1$	$\simeq \frac{H_0}{jx}$	$\simeq \frac{H_0}{x}$	$\simeq 20 \log(H_0) - 20 \log(x)$	$\arg(H_0) - \arg(jx) \simeq -\frac{\pi}{2}$
$x = 1$	$= \frac{H_0}{1+j}$	$= \frac{H_0}{\sqrt{2}}$	$= \log(H_0) - 10 \log(2) \simeq -5,5$ dB	$= -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}$

**Q.7** On trace le diagramme de Bode :



**Q.8** La droite d'équation :  $G_{dB} = -2,5 \text{ dB} - 20 \log(x)$  est asymptote en hautes fréquences, de pente  $-20 \text{ dB/décades} \implies$  caractère pseudo-intégrateur en HF (cf équivalent de  $\underline{H}(jx)$  en HF).

**Q.9** Par linéarité du filtre :  $s(t) = S_0 + S_m \cos(\omega t + \varphi_s)$

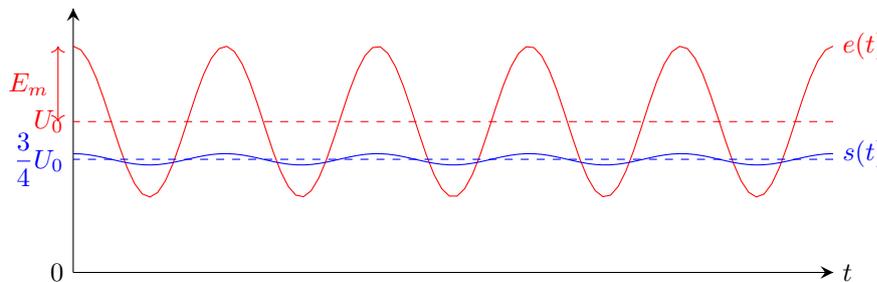
**Q.10** Soit encore :  $s(t) = U_0 \times G(0) + E_m \times G(\omega) \cos(\omega t + \varphi_e + \Phi(\omega))$

où par identification :

- $S_0 = U_0 \times G(x=0) = U_0 \times H_0 \implies S_0 = \frac{3}{4}U_0$  ;
- $S_m = E_m \times G(\omega)$  à la fréquence de 4 Hz càd  $x = \frac{f}{f_c} = 10$  :  $S_m = \frac{E_m H_0}{1+x^2} \simeq \frac{3E_m}{40}$  ;
- $\varphi_s = \varphi_e + \Phi(x) \implies \varphi_s = \varphi_e - \arctan(10)$  AN :  $\varphi_s - \varphi_e \simeq -1,47 \text{ rad} \simeq -74^\circ$

**Q.11** Bilan :  $s(t) = \frac{3U_0}{4} + \frac{3E_m}{40} \cos[2\pi ft - \arctan(10)] \approx \frac{3U_0}{4}$

On atténue d'un facteur 10 l'amplitude du signal parasite par rapport au signal continu.



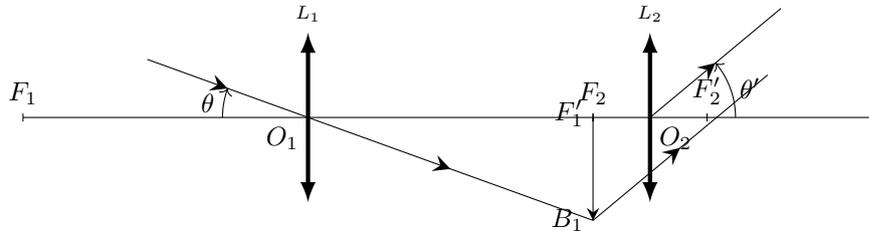
**Solution de l'exercice 2 : Lunette astronomique**

**Q.1** Un œil supposé sans défaut peut voir sans accommoder un objet situé à l'infini. Pour que la lunette permette de voir un objet situé à l'infini sans accommoder il faut que l'image d'un objet à l'infini à travers l'objectif soit situé sur le foyer objet de l'oculaire et donc que le foyer objet de l'oculaire  $F_2$  soit confondu avec le foyer image de l'objectif  $F_1'$  :  $F_1' = F_2$ .



Un tel système optique est appelé système afocal et ne possède pas de foyers.

**Q.2** Soit le schéma suivant :

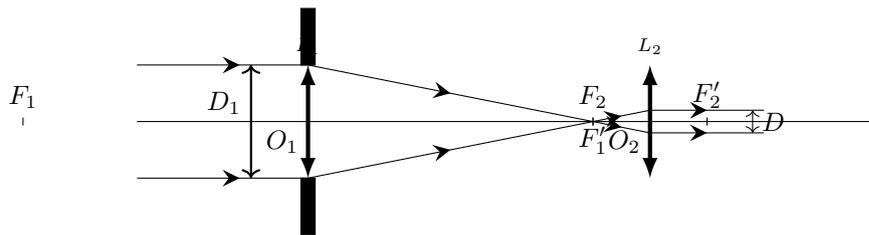


**Q.3** Graphiquement on voit que :  $\tan \theta = \frac{\overline{F_1 B_1}}{\overline{O_1 F_1'}} = \frac{\overline{F_1' B_1}}{f_1}$  de même :  $\tan \theta' = \frac{\overline{F_1 B_1}}{\overline{O_2 F_2}} = -\frac{\overline{F_1' B_1}}{f_2}$

Dans les conditions de Gauss on a :  $\tan \theta \approx \theta$  et  $\tan \theta' \approx \theta'$

$$G = \frac{\theta'}{\theta} \approx -\frac{f_1}{f_2} \text{ AN : } \underline{G = -50}$$

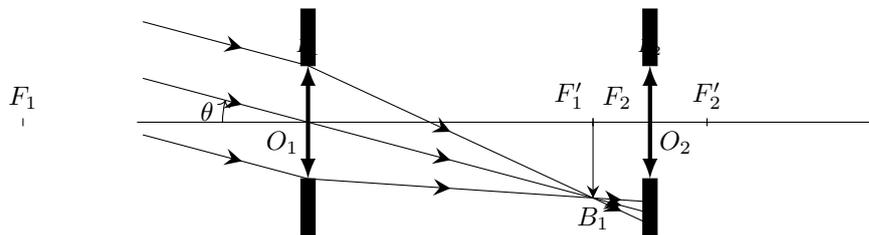
**Q.4** Soit le schéma suivant :



**Q.5** En utilisant le théorème de Thalès on a :  $\frac{D}{D_1} = \frac{f_2}{f_1} \implies \underline{D = -\frac{D_1}{G}}$

**Q.6** Soit l'application numérique AN :  $\underline{D = 2 \text{ mm} < D_2}$

**Q.7** On voit sur le schéma suivant que si l'angle  $\theta$  est trop grand alors les rayons ne peuvent pas passer à travers l'oculaire. Le diaphragme de l'oculaire est donc appelé diaphragme de champ car il limite le champ de vision.



**Q.8** L'aberration chromatique d'une lentille vient du fait que l'indice optique du verre dépend de la longueur d'onde, lors du passage à travers la lentille les rayons sont alors séparés en fonction de leurs longueurs. On appelle ces milieux des milieux dispersifs.

### Solution de l'exercice 3 : Mouvement de la dalle : mise en équation

**Q.1** Loi de Hooke :  $\vec{F}_r = -k(l(t) - l_0)\vec{u}_{O \rightarrow M}$  soit  $\underline{\vec{F}_r = -k(x(t) - l_0)\vec{u}_x}$

**Q.2** **Système** :  $=\{M(m)\}$  Dalle assimilée à un point matériel.

**Référentiel** : Terrestre  $\mathcal{R}_T(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  supposée galiléen.

**Bilan** :

- $\vec{F}_r = -k(x(t) - l_0)\vec{u}_x$  force de rappel exercée par le ressort sur la dalle ;

- $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_x$  poids de la dalle.

**Condition équilibre mécanique :**  $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \iff \vec{P} + \vec{F}_r = \vec{0}$

selon l'axe du mouvement ( $Ox$ ) :  $-mg - k(x_{\text{eq}} - l_0) = 0$  (1)

$$x_{\text{eq}} = l_0 - \frac{mg}{k} < l_0$$

Dont on vérifie l'homogénéité :  $\left[\frac{mg}{k}\right] = \left[\frac{F}{F/L}\right] = [L] = [x_{\text{eq}}] = [l_0]$

**Q.3** On réécrit alors  $x'_{\text{eq}} = l_0 - \frac{(m+M)g}{k}$  avec  $\delta = x_{\text{eq}} - x'_{\text{eq}} = \frac{Mg}{k}$

**Q.4** On choisit  $M = 70 \text{ kg}$ ,  $g \simeq 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $\delta \simeq 10 \text{ mm}$  d'où la valeur approchée  $k \simeq 7 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$

**Q.5** **Système** =  $\{M(m)\}$  Dalle assimilée à un point. **Référentiel** : Terrestre  $\mathcal{R}_T(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  supposé galiléen.

**Bilan :**

- $\vec{F}_r = -k(x(t) - l_0)\vec{u}_x$  force de rappel exercée par le ressort sur la dalle ;
- $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_x$  poids de la dalle ;
- $\vec{F} = -F\vec{u}_x$  force exercée par le danseur en mouvement ;
- $\vec{F}_1 = -D\vec{v} = -D\dot{x}\vec{u}_x$  force de frottement fluide exercée par l'amortisseur mécanique.
- $\vec{F}_\alpha = -\alpha\vec{v} = -\alpha\dot{x}\vec{u}_x$  force d'amortissement électromagnétique.

**PFD :**  $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}_{M/\mathcal{R}_T} = \vec{F}_r + \vec{P} + \vec{F} + \vec{F}_1 + \vec{F}_\alpha$

Selon l'axe ( $Ox$ ) :  $m\ddot{x} = -k(x(t) - l_0) - mg - F - D\dot{x} - \alpha\dot{x}$  (2)

on effectue ensuite (2) - (1) :  $m\ddot{x} = -k(x(t) - x_{\text{eq}}) - F - (\alpha + D)\dot{x}$

avec le changement de variable imposé :  $X(t) = x(t) - x_{\text{eq}}$ ,  $\dot{X}(t) = \dot{x}(t)$  et  $\ddot{X}(t) = \ddot{x}(t)$

$$\ddot{X} + \frac{\alpha + D}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}X = -\frac{F}{m} \quad \text{où } a_0 = \frac{k}{m} \quad \text{et } b_0 = -\frac{F}{m}$$

### Solution de l'exercice 4 : Puissance électrique reçue par les LED

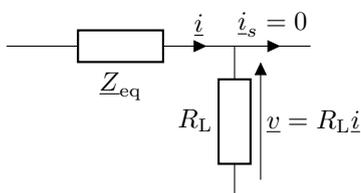
**Q.1** Pour une bobine :  $\underline{Z}_L = jL\omega$  et pour une résistance :  $\underline{Z}_R = R$ .

**Q.2** On note  $\omega$  la pulsation de forçage en RSF lorsque les danseurs sont en mouvement (liée à la Tension d'entrée sinusoïdale  $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$ ). On note alors  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$  la "réponse en courant" également sinusoïdale, de même pulsation que l'entrée mais d'amplitude différente et présentant un déphasage.

On associe au signal réel le signal complexe :  $\underline{i}(t) = I_m e^{j(\omega t + \varphi)} = I_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{I} e^{j\omega t}$

où  $\underline{I} = I_m e^{j\varphi}$  est l'amplitude complexe de la réponse en courant.

**Q.3** En RSF à la pulsation  $\omega$  on a le circuit électrique suivant :



**Pont diviseur de tension :**

$$\underline{v} = \frac{R_L}{\underline{Z}_{\text{eq}} + R_L} \underline{u} = \frac{R_L}{R_L + R + j\omega L} \underline{u}$$

$$\underline{v} = R_L \underline{i} = R_L \underline{I} e^{j\omega t} = \frac{R_L}{R_L + R + j\omega L} U_0 e^{j\omega t}$$

On en déduit l'amplitude complexe de la réponse en courant :  $\underline{I} = \frac{U_0}{R_L + R + j\omega L}$

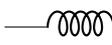
de module  $I_m = |\underline{I}| = \frac{U_0}{\sqrt{(R + R_L)^2 + \omega^2 L^2}}$

d'argument  $\varphi = \arg(\underline{I}) = \arg(U_0) - \arg(\underbrace{R + R_L}_{>0} + j\omega L)$  soit  $\varphi = -\arctan\left(\frac{\omega L}{R + R_L}\right)$

Finalement ; on réécrit  $i(t) = \frac{U_0}{\sqrt{(R + R_L)^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\omega L}{R + R_L}\right)\right)$

**Q.4** La pulsation de forçage  $\omega$  est liée à la période  $T$  des "pas de danse" que l'on prend égal à  $T \simeq 0,5\text{s}$  (pour un "Bon" danseur !) D'où  $\omega \simeq 12\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$

**Q.5** On compare la pulsation caractéristique  $\omega_c$  du "quadripôle  $RL$ " :  $\omega_c = \frac{R}{L} \simeq 11,5 \times 10^3 \text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \gg \omega$

Nous sommes donc dans le cas des basses fréquences où   $\Leftrightarrow |Z_L| = \omega L \rightarrow 0$   
On retrouve l'approximation proposé par le constructeur.

**Q.6** Dans le cadre de cette approximation, un pont diviseur de tension en basse fréquence assure la relation :

$$v = \frac{R_L}{R + R_L} u$$

**Q.7** La puissance algébriquement reçue par le réseau de LED vaut :  $P_L(t) = v(t) \cdot i(t) = \frac{v^2(t)}{R_L} = \frac{R_L u^2(t)}{(R + R_L)^2}$

Soit en utilisant  $u = K_t \Omega$  et  $\Omega = \gamma \dot{x}$  :

$$P_L(t) = \frac{R_L}{(R + R_L)^2} [K_t \gamma \dot{x}]^2 \quad \text{donc } A = \frac{R_L}{(R + R_L)^2}$$

**Q.8** La puissance fournie par la fem vaut :

$P_u(t) = u(t) \cdot i(t) = u(t) \cdot \frac{u(t)}{R + R_L}$  où  $i(t) = \frac{u(t)}{R + R_L}$  dans le cadre de cette approximation  $\omega \ll \omega_c$

$$P_u(t) = \frac{K_t^2 \gamma^2 \dot{x}^2(t)}{(R + R_L)}$$

La puissance prélevée par la génératrice à la dalle mobile vaut :

$$P_P(t) = \frac{P_u(t)}{\eta} = \frac{K_t^2 \gamma^2 \dot{x}^2(t)}{\eta(R + R_L)}$$

**Q.9 AN** :  $\alpha \simeq 3 \times 10^4 \text{kg} \cdot \text{s}^{-1} \gg D = 10 \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$  On peut alors négliger la force de frottement fluide exercée par l'amortisseur mécanique.

### Solution de l'exercice 5 : Réponse indicielle

**Q.1** On pose alors  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  et  $\frac{\alpha}{m} = \frac{\omega_0}{Q} \Leftrightarrow Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{\sqrt{k \cdot m}}{\alpha}$  le facteur de qualité de l'oscillateur mécanique amorti.

**Q.2** Par linéarité de l'EDL2, la solution complète s'écrit :  $X(t) = X_p + X_h(t)$

$X_p = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$  est la solution particulière.

$X_h(t)$  solution de l'EH :  $\ddot{X}_h + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X}_h + \omega_0^2 X_h = 0$  d'équation caractéristique

$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$  de discriminant  $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2$  que l'on peut calculer ici avec les valeurs fournies :

$$\Delta = \omega_0^2 \frac{\alpha^2}{m^2 \omega_0^2} - 4 \frac{k}{m} = \frac{\alpha^2}{m^2} - 4 \frac{k}{m} \simeq 7,2 \times 10^5 \text{rad}^2 \cdot \text{s}^{-2} > 0$$

$\Delta > 0$  assure un régime transitoire **apériodique** où les racines de l'équation caractéristique sont réelles :

$$r_{1/2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$$

on en déduit alors la solution de l'EH :  $X_h(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$  où  $A_1$  et  $A_2$  sont deux constantes d'intégration.

**Q.3** On vérifie si la solution approchée vérifie les conditions initiales :

$$X(t=0) \simeq \frac{F_0}{m} \left[ 1 - \frac{1}{1-Q^2} \times (1-Q^2) \right] = 0 \text{ vérifiée } (x(t=0) = x_{\text{eq}})$$

$$\dot{X}(t=0) = \frac{F_0}{k(1-Q^2)} \left( \omega_0 Q - Q^2 \frac{\omega_0}{Q} \right) = 0 \text{ vérifié.}$$

**Q.4** On en déduit la loi d'évolution de la vitesse de la dalle :  $\dot{x}(t) = \dot{X}(t) = \frac{F_0 \omega_0 Q}{k(1-Q^2)} \left( e^{-\omega_0 Q t} - e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}} \right)$

**Q.5** La puissance électrique reçue par les LED vaut alors :

$$P_L(t) = A[K_t \gamma \dot{x}(t)]^2 = A^2 K_t^2 \gamma^2 \frac{F_0^2 \omega_0^2 Q^2}{k^2 (1-Q^2)^2} \left( e^{-\omega_0 Q t} - e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}} \right) \quad \text{donc } K = A^2 K_t^2 \gamma^2 \frac{\omega_0^2 Q^2}{k^2 (1-Q^2)^2}$$

**Q.6** En régime transitoire apériodique avec  $Q < \frac{1}{2}$ , l'exponentielle qui converge plus rapidement est  $e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}}$

Aux "temps longs", on définit alors  $\tau = \frac{1}{\omega_0 Q}$  le temps caractéristique de l'exponentielle  $e^{-\omega_0 Q t}$ .

**Q.7** Trait plein  $\rightarrow$  échelon de force  $F_0$  en Newton.

Pointillés  $\rightarrow$  puissance électrique reçue par les LED en Watt.

**Q.8** La puissance électrique  $P_L$  reçue par les LED est **non nulle** quand il n'y a plus d'échelon de force  $F_0$  !

**Q.9** On retrouve l'allure des exponentielle décroissantes pour  $P_L(t)$  + dépendance de  $P_L$  en  $F_0^2$ , en effet si :

$$F_0 \rightarrow \frac{F_0}{2} \text{ alors } P_{L\text{max}} \rightarrow P_{L\text{max}}/4.$$

## Solution de l'exercice 6 : Forçage sinusoïdal

**Q.1** On relève sur la figure 7 :  $F_0 = 1000 \text{ N}$ ,  $F_1 = 800 \text{ N}$ ,  $5T \simeq 1,7 \text{ s}$  soit  $\omega \simeq 18 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**Q.2** On réécrit l'EDL2 en complexe :  $\ddot{\underline{X}} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\underline{X}} + \omega_0^2 \underline{X} = \frac{F_1}{m} e^{j(\omega t + \varphi)} \iff -\omega^2 \underline{X} + j\omega \frac{\omega_0}{Q} \underline{X} + \omega_0^2 \underline{X} = \frac{F_1}{m} e^{j(\omega t + \varphi)}$

$$\underline{X} = \frac{\frac{F_1}{m} e^{j(\omega t + \varphi)}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q}}$$

On en déduit l'amplitude :

$$X_0 = |\underline{X}| = \frac{F_1/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_0 \omega}{Q}\right)^2}}$$

**Q.3** Avec  $X(t) = X_0 \cos(\omega t + \psi)$  on a :  $\dot{X} = -X_0 \omega \sin(\omega t + \psi)$  on en déduit :

$$V_0 = \omega X_0 = \frac{\omega F_1/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_0 \omega}{Q}\right)^2}}$$

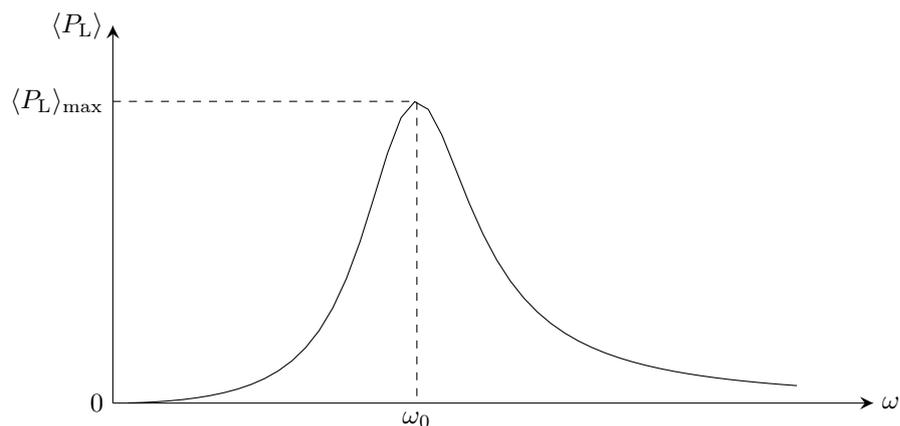
**Q.4** Comportement asymptotique de  $\langle P_L \rangle$  :

- $\langle P_L \rangle \rightarrow 0$  lorsque  $\omega \rightarrow 0$  ;
- $\langle P_L \rangle \rightarrow 0$  lorsque  $\omega \rightarrow +\infty$  ;

La puissance moyenne récupérée  $\langle P_L \rangle$  est maximale lorsque  $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \simeq 65 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Dans ce cas :  $\langle P_L \rangle_{\text{max}} = \frac{\eta^2 F_1^2 R_L}{2K_t^2 \gamma^2}$  phénomène de résonance en puissance.

D'où l'allure :

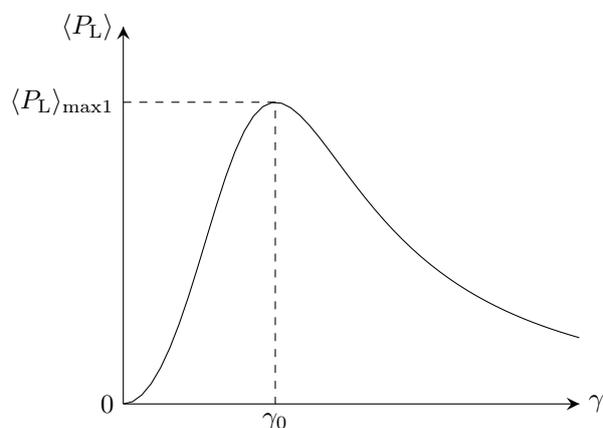


**Q.5** Compte tenu des hypothèses imposées :

- Au tempo de 125 Batt/min on associe une pulsation de  $\omega_1 = 12 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  ;
- Au tempo de 115 Batt/min on associe une pulsation de  $\omega_2 = 13 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  ;

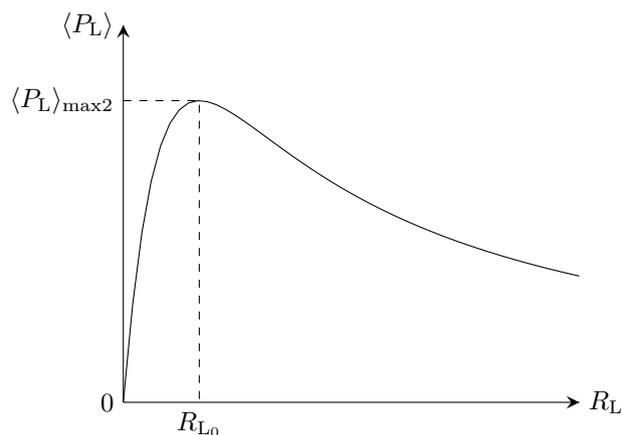
Avec  $\omega_2 > \omega_1$ , l'équipe 2 "pro du disco" gagne ce duel.

**Q.6** Soit :



BF :  $\langle P_L \rangle \rightarrow 0$  pour  $\gamma \rightarrow 0$  ;  
 HF :  $\langle P_L \rangle \rightarrow 0$  pour  $\gamma \rightarrow +\infty$  ;  
 Maximum atteint pour  $\gamma = \gamma_0$

**Q.7** Soit :



BF :  $\langle P_L \rangle \rightarrow 0$  pour  $R_L \rightarrow 0$  ;  
 HF :  $\langle P_L \rangle \rightarrow 0$  pour  $R_L \rightarrow +\infty$  ;  
 Maximum atteint pour  $R_L = R_{L_0}$

**Q.8** Tout à fait conforme, mêmes allures.

**Q.9** Optimisation :  $\langle P_L \rangle_{\max}$  pour :

$$\left| \begin{array}{l} \gamma = 1,8 \times 10^4 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1} \\ R_L = 300 \Omega \end{array} \right.$$


---

... FIN ...