Exercices 13 – Calcul matriciel – Corrigé

Produits et puissances de matrices

Exercice 1. — Calculer tous les produits possibles de deux matrices parmi les suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Le produit de deux matrices $M \times N$ est défini si et seulement si le nombre de colonnes de M est égal au nombre de lignes de N.

Par conséquent, les produits :

$$AC,\ BD,\ CB,\ CD,\ DA,\ DC,\ A^2 \text{ et } B^2$$

ne sont pas définis.

Pour les autres produits, on a :

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 2 & -3 & 5 \\ -6 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$AD = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 12 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 8 & 18 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -7 & 16 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$DB = \begin{pmatrix} 14 & -1 & -5 \\ 8 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 4 & 18 & 7 \\ 0 & 22 & 7 \\ 0 & -21 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D^2 = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. — Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1/ Déterminer toutes les matrices B de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$.

Soit $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. On a : $AB = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Conclusion. Soit $B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. On a : $AB = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})} \Longleftrightarrow \exists\, (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ B = \begin{pmatrix} x & y \\ -x & -y \end{pmatrix}$.

2/ Déterminer toutes les matrices C de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AC = CA = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$.

Soit $C = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. D'après la question précédente :

$$AC = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})} \Longleftrightarrow \exists\, (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ C = \begin{pmatrix} x & y \\ -x & -y \end{pmatrix}$$

Alors : $CA = \begin{pmatrix} x & x \\ -x & -x \end{pmatrix}$.

Conclusion. Soit $C \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. On a : $\left[AC = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})} \wedge CA = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}\right] \Longleftrightarrow \left[\exists\, y \in \mathbb{R},\ C = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & -y \end{pmatrix}\right]$.

Exercice 3. — (Commutant d'une matrice diagonale dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$). Déterminer le **commutant** de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ (a et b réels distincts), c'est-à-dire l'ensemble des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{K})$ telles que $AM = MA$.

Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$AM = \begin{pmatrix} ax & ay \\ bz & bt \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad MA = \begin{pmatrix} ax & by \\ az & bt \end{pmatrix}$$

On a : $[AM = MA] \Longleftrightarrow [bz = az \wedge ay = by] \Longleftrightarrow [z = 0 \wedge y = 0]$

Conclusion. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. On a : $[AM = MA] \Longleftrightarrow \left[\exists\,(x,t) \in \mathbb{R}^2,\ M = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\right]$.

Exercice 4. — (Commutant d'une matrice). Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$ qui **commutent** avec A, c'est-à-dire l'ensemble des matrices M de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$ telles que $AM = MA$.[*]

Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$AM = \begin{pmatrix} ax & ay \\ bz & bt \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad MA = \begin{pmatrix} ax & by \\ az & bt \end{pmatrix}$$

On a : $[AM = MA] \Longleftrightarrow [bz = az \wedge ay = by] \Longleftrightarrow [z = 0 \wedge y = 0]$

Conclusion. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. On a : $[AM = MA] \Longleftrightarrow \left[\exists\,(x,t) \in \mathbb{R}^2,\ M = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\right]$.

Exercice 5. — (Commutant d'une matrice diagonale, cas général). Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ n réels distincts, et D la matrice diagonale $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Déterminer les matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec D.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ n scalaires distincts. Notons $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
Une matrice $M = (m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est dans le commutant de D si et seulement si $MD = DM$.

Or : $MD = DM \Longleftrightarrow \forall\,(i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ (MD)_{ij} = (DM)_{ij}$

$$\Longleftrightarrow \forall\,(i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ \sum_{k=1}^{n} m_{ik} d_{kj} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik} m_{kj}$$

$$\Longleftrightarrow \forall\,(i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ m_{ij} d_{jj} = d_{ii} m_{ij}$$

$$\Longleftrightarrow \forall\,(i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ m_{ij} \lambda_j = \lambda_i m_{ij}$$

$$\Longleftrightarrow \forall\,(i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ (\lambda_j - \lambda_i)\, m_{ij} = 0$$

D'où, puisque l'on a supposé les λ_i distincts : $\forall\,(i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow m_{ij} = 0$

[*] L'ensemble de ces matrices est appelé le commutant de la matrice A.

On en déduit que les matrices M commutant avec D sont celles dont tous les coefficients situés en dehors de la diagonale ($i \neq j$) sont nuls ; en d'autres termes, ce sont exactement les matrices diagonales de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Conclusion : le commutant de D est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 6. — **(Commutant d'une matrice, encore).** Soient $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathrm{COM}(A)$ le commutant de la matrice A, que l'on ne présente plus. Montrer que $(\mathrm{COM}(A), +)$ est un groupe.

Il suffit de vérifier les quatre axiomes assurant que $(\mathrm{COM}(A), +)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{M}_n(\mathbb{K}), +)$.

Les axiomes SG1 ($\mathrm{COM}(A) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$) et SG2 ($0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{K})} \in \mathrm{COM}(A)$) sont évidemment réalisés.

Il est à peine moins évident de vérifier que $\mathrm{COM}(A)$ est stable par somme (SG3) :

Si M et $N \in \mathrm{COM}(A)$, alors : $(M+N)A = MA + NA = AM + AN = A(M+N)$. D'où : $(M+N) \in \mathrm{COM}(A)$

Enfin, $\mathrm{COM}(A)$ est stable par passage à l'opposé (SG4) :

Si $M \in \mathrm{COM}(A)$, alors : $(-M)A = -(MA) = -(AM) = A \times (-M)$. D'où : $(-M) \in \mathrm{COM}(A)$

Conclusion. $\mathrm{COM}(A)$ est une partie de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, contenant $0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{K})}$ (l'élément neutre pour l'addition dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$), stable par somme et par passage à l'opposé. Il s'ensuit que $(\mathrm{COM}(A), +)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{M}_n(\mathbb{K}), +)$.

En particulier, $(\mathrm{COM}(A), +)$ est un groupe (abélien).

Exercice 7. — Dans chacun des cas suivants, calculer A^n pour tout entier naturel n.

1/ Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice A est nilpotente puisque $A^2 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{K})}$

Conclusion. $A^0 = \mathrm{I}_2$; $A^1 = A$; et $A^n = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{K})}$ pour tout entier $n \geqslant 2$.

2/ Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

On a : $A = a\mathrm{I}_2 + B$, avec $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrice de la question précédente.

Puisque les matrices $a\mathrm{I}_2$ et B commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer A^n.

Soit n un entier naturel, on a :

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k (a\mathrm{I}_2)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} B^k = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} a^{n-k} B^k = a^n \mathrm{I}_2 + n a^{n-1} B$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} a^n & n a^{n-1} b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

3/ Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

On a : $A = 3\mathrm{I}_2 + B$, avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On peut vérifier par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B^n = 2^{n-1}B$.
Puisque les matrices $3\mathrm{I}_2$ et B commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer A^n.

Soit n un entier naturel, on a :

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k \left(3\mathrm{I}_2\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} B^k = 3^n \mathrm{I}_2 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} 2^{k-1} B = 3^n \mathrm{I}_2 + \frac{5^n - 3^n}{2} B$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 5^n + 3^n & 5^n - 3^n \\ 5^n - 3^n & 5^n + 3^n \end{pmatrix}$

4/ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a : $A = \mathrm{I}_3 + B$, avec $B = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On peut observer que B est nilpotente puisque :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^3 = 0_{\mathrm{M}_3(\mathbb{R})}$$

Puisque les matrices I_3 et B commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer A^n.

Soit n un entier naturel, on a :

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k \left(\mathrm{I}_3\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} B^k = \mathrm{I}_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & na & nb + n(n-1)ac/2 \\ 0 & 1 & nc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5/ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On a : $A = D + B$, avec $D = \mathrm{diag}(1, 1, 2)$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On peut observer que B est nilpotente puisque : $B^2 = 0_{\mathrm{M}_3(\mathbb{R})}$.

En outre, on peut vérifier que $BD = DB$.

On peut donc utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer A^n.

Soit n un entier naturel, on a :

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k D^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k \text{diag}\left(1, 1, 2^{n-k}\right) = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} B^k \text{diag}\left(1, 1, 2^{n-k}\right)$$

$$= \text{diag}\left(1, 1, 2^n\right) + n\, \underbrace{B\text{diag}\left(1, 1, 2^{n-1}\right)}_{=B}$$

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

Exercice 8. — Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Calculer $A(\theta)\, A(\varphi)$, puis en déduire $(A(\theta))^n$ pour tout entier naturel n.

En utilisant les formules d'addition pour le cos et le sin, on vérifie que : $A(\theta)\, A(\varphi) = A(\theta + \varphi)$.

Par une récurrence immédiate, on en déduit que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ (A(\theta))^n = A(n\theta)$

Exercice 9. — On considère les matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer B^n puis C^n pour tout entier naturel n.

Par une récurrence immédiate, on montre que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ B^n = 3^{n-1} B$ (et $B^0 = \mathrm{I}_3$).

Par ailleurs, on a : $C = 2\mathrm{I}_3 + B$.

Puisque les matrices $2\mathrm{I}_3$ et B commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer C^n.

Soit n un entier naturel non nul, on a :

$$C^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k (2\mathrm{I}_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} B^k = 2^n \mathrm{I}_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} 3^{k-1} B = 2^n \mathrm{I}_3 + \frac{5^n - 2^n}{3} B$$

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad C^n = 2^n \mathrm{I}_3 + \dfrac{5^n - 2^n}{3} B$ (et $C^0 = \mathrm{I}_3$).

Exercice 10. — (Racines carrées de la matrice nulle).
Déterminer toutes les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{C})}$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$. On a : $M^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}$.

Par suite :

$$M^2 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{C})} \Longleftrightarrow \begin{cases} a^2+bc=0 \\ b(a+d)=0 \\ c(a+d)=0 \\ d^2+bc=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a^2+bc=0 \\ b(a+d)=0 \\ c(a+d)=0 \\ a^2=d^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a^2+bc=0 \\ b(a+d)=0 \\ c(a+d)=0 \\ d=\pm a \end{cases}$$

Premier cas — $b=0$. Alors $a=0$ (L1), $d=0$ (L4). Il n'y a aucune condition sur c.

On en déduit que les matrices : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ (avec $c \in \mathbb{C}$) ont un carré égal à $0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{C})}$.

Deuxième cas — $b \neq 0$. Alors $a+d=0$ (L2). D'où : $M^2 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{C})} \Longleftrightarrow \begin{cases} a^2+bc=0 \\ d=-a \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} c=-a^2/b \\ d=-a \end{cases}$

On en déduit que les matrices : $\begin{pmatrix} a & b \\ -a^2/b & -a \end{pmatrix}$ (avec $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}^*$)ont un carré égal à $0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{C})}$.

Conclusion. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$. On a :

$$\left[M^2 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{C})}\right] \Longleftrightarrow \left[\left(\exists c \in \mathbb{C},\ M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}\right) \text{ ou } \left(\exists (a,b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*,\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ -a^2/b & -a \end{pmatrix}\right)\right]$$

Remarque. Ceci signifie en particulier que l'équation $X^2 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{C})}$ admet dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une infinité de solutions.

Exercice 11. — (Racines carrées de la matrice identité).
Déterminer toutes les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $M^2 = I_2$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$. On a : $M^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}$.

Par suite :

$$M^2 = \mathrm{I}_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} a^2+bc=1 \\ b(a+d)=0 \\ c(a+d)=0 \\ d^2+bc=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a^2+bc=1 \\ b(a+d)=0 \\ c(a+d)=0 \\ d=\pm a \end{cases}$$

Premier cas — $b=0$. Alors : $M^2 = \mathrm{I}_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} a=\pm 1 \\ c(a+d)=0 \\ d=\pm 1 \end{cases}$

Premier sous-cas — $c=0$. Alors : $M^2 = \mathrm{I}_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} a=\pm 1 \\ d=\pm 1 \end{cases}$

On en déduit que : $M = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ (quatre matrices solutions).

Deuxième sous-cas — $c \neq 0$. Alors : $M^2 = \mathrm{I}_2 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \pm 1 \\ d = \mp 1 \end{array} \right.$

On en déduit que : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}$ (avec $c \in \mathbb{C}$), ou $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ (avec $c \in \mathbb{C}$).

Deuxième cas — $b \neq 0$. Alors : $M^2 = \mathrm{I}_2 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^2 + bc = 1 \\ d = -a \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c = (1-a^2)/b \\ d = -a \end{array} \right.$

On en déduit que : $M = \begin{pmatrix} a & b \\ (1-a^2)/b & -a \end{pmatrix}$ (avec $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}^*$).

Conclusion. L'ensemble des matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $M^2 = \mathrm{I}_2$ est :

$$\{\mathrm{I}_2, -\mathrm{I}_2, \mathrm{diag}(1,-1), \mathrm{diag}(-1,1)\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{C} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{C} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ (1-a^2)/b & -a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \right\}$$

Remarque. Ceci signifie en particulier que l'équation $X^2 = \mathrm{I}_2$ admet dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une infinité de solutions...

Exercice 12. — **(Racines carrées d'une matrice)**.

Déterminer toutes les matrices $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$. La réponse change t-elle si l'on considère $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$?

A venir !

Matrices inversibles

Exercice 13. — Lorsque c'est possible, calculer l'inverse de la matrice A dans chacun des cas suivants :

1/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On a : $\det A = 1 \neq 0$. Donc $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

On a : $\det A = 0$. Donc $A \notin \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$.

3/ $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

On a : $\det A = -2 \neq 0$. Donc $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ et $A^{-1} = \dfrac{1}{-2} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

4/ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

On a : $\det A = 0$. Donc $A \notin \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$.

5/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a : $\det A = 0$. Donc $A \notin \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$.

6/ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

On a : $\det A = -1 \neq 0$. Donc $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ et $A^{-1} = A$.

Exercice 14. — Calculer l'inverse (lorsque c'est possible) de la matrice A dans chacun des cas suivants :

1/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{K})$ et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A \notin \mathrm{GL}_3(\mathbb{K})$ (A possède deux lignes égales)

3/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A \notin \mathrm{GL}_3(\mathbb{K})$ (A possède deux lignes égales)

4/ $A = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t) & \mathrm{sh}\,(t) \\ \mathrm{sh}\,(t) & \mathrm{ch}(t) \end{pmatrix}$

(avec t réel quelconque)

On a : $\det A = 1 \neq 0$.[†] Donc $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ et $A^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(-t) & \mathrm{sh}\,(-t) \\ \mathrm{sh}\,(-t) & \mathrm{ch}(-t) \end{pmatrix}$.

5/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{K})$ et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 7 \\ 4 & 3 & -5 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

†. Selon la relation fondamentale de la trigonométrie hyperbolique : $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^{\,2} = 1$.

6/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 12 \\ -1 & -1 & 16 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

$A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{K})$ et $A^{-1} = \dfrac{1}{70}\begin{pmatrix} 25 & -45 & 60 \\ 7 & 7 & -28 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

7/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$A \notin \mathrm{GL}_3(\mathbb{K})$ (la dernière colonne de A est la somme des deux premières).

8/ $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{K})$ et $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

9/ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{K})$ et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 15. — On considère la matrice de $M_4(\mathbb{R})$ suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} *(en utilisant la méthode "AX=B")*.

A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

2) Une autre méthode pour le calcul de A^{-1}.

a) Calculer A^2, et vérifier que $A^2 = -I_4$.

RAS.

b) Déduire de la question précédente que A est inversible, et préciser A^{-1}.

D'après la question précédente, on a : $A^4 = I_4$.

Conclusion. A est inversible, et $A^{-1} = A^3$.

Exercice 16. — Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1/ Calculer $(A+I)^3$.

On obtient : $A + I = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, puis $(A+I)^3 = 0_{\mathrm{M}_3(\mathbb{K})}$.

2/ Déduire de la question précédente que A est inversible et calculer son inverse.

Les matrices A et I commutent. D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$(A+I)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + I$$

On en déduit, avec la question précédente, que :

$$A^3 + 3A^2 + 3A + I = 0_{\mathrm{M}_3(\mathbb{K})} \Longleftrightarrow A^3 + 3A^2 + 3A = -I \Longleftrightarrow A \times (-A^2 - 3A - 3I) = I$$

Conclusion. A est inversible, et $A^{-1} = -A^2 - 3A - 3I$.

Exercice 17. — Soit A une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $A^4 + 2A^2 + 5A - I_n = 0$. Montrer que A est inversible, et exprimer son inverse en fonction de A.

D'après l'énoncé :

$$A^4 + 2A^2 + 5A = I_n \Longleftrightarrow A\left(A^3 + 2A + 5I_n\right) = I_n$$

Conclusion. A est inversible, et $A^{-1} = A^3 + 2A + 5I_n$.

Exercice 18. — On considère la matrice $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels.

1/ Calculer $M^2(a,b)$.

2/ Montrer qu'il existe deux réels α et β tels $M^2(a,b) = \alpha I_3 + \beta M(a,b)$.

3/ Déduire de la question précédente à quelle(s) condition(s) sur les réels a et b la matrice $M(a,b)$ est inversible. Et lorsque c'est possible, expliciter alors $(M(a,b))^{-1}$.

Exercice 19. — Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Pour n entier naturel non-nul, calculer $(M + I_3)^n$.

On a :

$$(M + I_3)^0 = I_3\,;\ (M + I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ (M + I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix};\ (M + I_3)^3 = 0_{\mathrm{M}_3(\mathbb{K})}$$

On déduit du dernier calcul que $(M + I_3)^n = 0_{\mathrm{M}_3(\mathbb{K})}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 3$.

2) Déduire de la question précédente que M est inversible, et expliciter son inverse.

D'après la question précédente :

$$M^3 + 3M^2 + 3M + I = 0_{\mathrm{M}_3(\mathbb{K})} \Longleftrightarrow M^3 + 3M^2 + 3M = -I \Longleftrightarrow M \times (-M^2 - 3M - 3I) = I$$

Conclusion. M est inversible, et $M^{-1} = -M^2 - 3M - 3I$.

3) Déterminer M^n pour tout entier naturel n.

A voir plus tard, dans le chapitre sur les polynômes.

Matrices semblables (“$B = P^{-1}AP$”)

Exercice 20. — On considère les matrices de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \; ; \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer P^{-1}.

2) Vérifier que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.

3) Déterminer A^n pour tout entier naturel n.

Exercice 21. — **(CB1, partie spécifique aux PCSI)**. Dans cette partie, on cherche à déterminer le terme général de la suite réelle (u_n) satisfaisant la relation $(\star)$ suivante

$$(\star) \qquad u_0 = 3,\ u_1 = 5,\ u_2 = 8 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} - 4u_{n+2} + 5u_{n+1} - 2u_n = 0.$$

On suppose que la suite (u_n) vérifie la relation $(\star)$. On pose pour tout entier naturel n : $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1) Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on explicitera telle que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$.
2) Etablir par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0$. Que vaut X_0 ?
3) On pose $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.
4) Soit $T = P^{-1}AP$. Vérifier que $T = D + N$ où $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
5) Etablir que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ A^n = PT^nP^{-1}$.
6) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   Indication : *vous avez montré précédemment que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0 = PT^nP^{-1}X_0$. Commencez par calculer $P^{-1}X_0$, puis multipliez à gauche par T^n, puis multipliez à gauche par P...*

Exercice 22. — On note : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \\ 5 & 9 & -4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2) Calculer $D = P^{-1}AP$, et vérifier que D est diagonale.
3) Etablir que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.
4) **Etude du commutant de A.** Dans cette question, on cherche à déterminer le commutant de la matrice A, càd l'ensemble noté $\mathrm{COM}(A)$ des matrices $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.
   a) Soit $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ quelconque. On pose $N = P^{-1}MP$. Montrer que : $[AM = MA] \Longleftrightarrow [ND = DN]$.
   b) Déterminer $\mathrm{COM}(D)$. En déduire $\mathrm{COM}(A)$.

Matrices symétriques et antisymétriques

Exercice 23. — Dans chacun des cas suivants, écrire M sous la forme $S+A$ avec S symétrique et A antisymétrique.

1) $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ 2) $M = \begin{pmatrix} \text{ch}(t) & \text{ch}(t) \\ \text{sh}\,(t) & -\text{sh}\,(t) \end{pmatrix}$ 3) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

Exercice 24. — **(Généralisation – Matrices symétriques et antisymétriques dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$).** Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

1/ Ecrire la forme générale d'une matrice symétrique dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, puis celle d'une matrice antisymétrique de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

2/ A l'aide de ce qui précède, montrer que toute matrice symétrique (*resp.* antisymétrique) peut s'écrire comme combinaison linéaire de s_n (*resp.* a_n) matrices. Exprimer s_n et a_n en fonction de n.

Divers

Exercice 25. — **(Calcul matriciel et Python – Résolution de systèmes** 2×2**).** Ecrire un programme chargé de faire pour vous la résolution d'un système linéaire de la forme : $\begin{cases} ax_1 + bx_2 &= b_1 \\ cx_1 + dx_2 &= b_2 \end{cases}$

Concrètement, le programme devra demander à l'utilisateur les valeurs de a, b, c, d, b_1 et b_2 et renvoyer un message du genre "Pas d'unicité de la solution" lorsque c'est le cas, et renvoyer l'unique couple solution sinon.

Exercice 26. — Soit A une matrice **nilpotente** de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire telle que $A^m = 0$ pour un certain entier naturel m.

1) Montrer que $\mathrm{I}_n - A$ est inversible, et expliciter son inverse.

2) En déduire l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 27. — Soit $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $M \times {}^tM \times M = \mathrm{I}_3$.
Montrer que M est inversible. Puis montrer que M est symétrique.

Exercice 28. — Soit n un entier $\geqslant 2$, et soit $\omega \in \mathbb{U}_n$, avec $\omega \neq 1$.
On définit une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ en posant $a_{ij} = \omega^{(i-1)(j-1)}$.

1/ Calculer $A\bar{A}$ (où $\bar{A}$ désigne la matrice conjuguée de $\mathbb{C}$, définie en posant : $\bar{A} = (\overline{a_{ij}})$).

2/ En déduire que A est inversible, et expliciter A^{-1}.

Exercice 29. — Etablir qu'il existe exactement 125 matrices M de $\mathrm{M}_4(\mathbb{C})$, que l'on précisera, telles que :

$$M^5 = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 30. — Dans $\mathrm{M}_9\left(\mathbb{K}\right)$, on considère l'ensemble F des matrices dont les sommes des coefficients de chaque colonne sont égales.

Montrer qu'il existe 73 matrices de $\mathrm{M}_9\left(\mathbb{K}\right)$ telle que toute matrice de F est combinaison linéaire de celles-ci.