

COLLE 13 – QUESTIONS DE COURS

QUESTION DE COURS 1. — Exercice : pour tout réel x , on pose : $\varphi(x) = \int_0^x e^{\cos(t)} dt$. Sens de variation, parité, signe et DL1 en 0 de φ .

PREUVE. ► Par construction, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x on a : $\varphi'(x) = e^{\cos(x)} > 0$. Il s'ensuit que φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

► $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à zéro, et pour tout réel x on a :

$$\varphi(-x) = \int_0^{-x} e^{\cos(t)} dt \stackrel{(ch. var: u=-t)}{=} - \int_0^x e^{\cos(u)} du = -\varphi(x) \quad \text{D'où } \varphi \text{ est impaire.}$$

► On a $\varphi(0) = 0$, et φ est croissante sur $\mathbb{R}$. On en déduit que φ est positive (*resp.* négative) sur $\mathbb{R}_+$ (*resp.* sur $\mathbb{R}_-$).

► φ est dérivable en 0 (car dérivable sur $\mathbb{R}$) : elle admet donc un DL à l'ordre 1 en 0.

Puisque $\varphi(0) = 0$, et $\varphi'(0) = e^{\cos(0)} = e$, on en déduit que : $\forall h \in \mathbb{R}, \quad \varphi(h) = eh + h\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$

QUESTION DE COURS 2. — Exercice : pour tout entier naturel n , on pose : $J_n = \int_0^1 (1-t)^{2n+1} \sin(t) dt$. 1/ Montrer que la suite (J_n) est décroissante, et positive. 2/ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq J_n \leq \frac{1}{2n+2}$. En déduire la limite de (J_n) .

PREUVE. Soit n un entier naturel. On a $J_n \geq 0$ car la fonction $t \mapsto (1-t)^{2n+1} \sin(t)$ est positive sur $[0, 1]$, et par positivité de l'intégrale.

En outre, par linéarité de l'intégrale, on a :

$$J_{n+1} - J_n = \int_0^1 (1-t)^{2n+3} \sin(t) - (1-t)^{2n+1} \sin(t) dt = \int_0^1 (1-t)^{2n+1} \sin(t)(t^2 - 1) dt$$

Or pour tout réel t dans $[0, 1]$, on a : $(1-t)^{2n+1} \sin(t)(t^2 - 1) \leq 0$.

Par positivité de l'intégrale, on en déduit que : $J_{n+1} - J_n \leq 0$.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, J_{n+1} - J_n \leq 0$ et $J_n \geq 0$. La suite (J_n) est décroissante et positive.

► Soit n un entier naturel. Pour tout réel t entre 0 et 1 on a : $0 \leq \sin(t) \leq 1$.

D'où : $\forall t \in [0, 1], \quad 0 \leq (1-t)^{2n+1} \sin(t) \leq (1-t)^{2n+1}$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que :

$$0 \leq J_n \leq \int_0^1 (1-t)^{2n+1} dt \quad \text{d'où : } 0 \leq J_n \leq \left[-\frac{(1-t)^{2n+2}}{2n+2} \right]_0^1$$

Ainsi : $0 \leq J_n \leq \frac{1}{2n+2}$ **Conclusion.** $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq J_n \leq \frac{1}{2n+2}$. Il s'ensuit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$ (gendarmes).

QUESTION DE COURS 3. — Exercice : pour tout entier naturel n , on pose : $I_n = \int_0^\alpha \operatorname{sh}^{2n}(t) dt$ (α réel quelconque). Etablir que : $I_{n+1} = \operatorname{ch}(\alpha) - (2n+1)(I_{n+1} + I_n)$.

PREUVE. Soit n un entier naturel. On a : $I_{n+1} = \int_0^\alpha \operatorname{sh}^{2n+2}(t) dt$.

Pour tout réel t on pose :
$$\begin{cases} u(t) = \operatorname{ch}(t) \\ v(t) = \operatorname{sh}^{2n+1}(t) \end{cases} \quad \text{d'où : } \begin{cases} u'(t) = \operatorname{sh}(t) \\ v'(t) = (2n+1)\operatorname{ch}(t)\operatorname{sh}^{2n}(t) \end{cases}$$

Selon les théorèmes généraux, les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \alpha]$. La formule d'intégration par parties permet alors d'écrire :

$$I_{n+1} = [\operatorname{ch}(t)\operatorname{sh}^{2n+1}(t)]_0^\alpha - (2n+1) \int_0^\alpha \operatorname{ch}^2(t)\operatorname{sh}^{2n}(t) dt = \operatorname{ch}(\alpha) - (2n+1) \int_0^\alpha (1 + \operatorname{sh}^2(t)) \operatorname{sh}^{2n}(t) dt$$

Or, par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^\alpha (1 + \operatorname{sh}^2(t)) \operatorname{sh}^{2n}(t) dt = \int_0^\alpha \operatorname{sh}^{2n}(t) + \operatorname{sh}^{2n+2}(t) dt = \int_0^\alpha \operatorname{sh}^{2n}(t) dt + \int_0^\alpha \operatorname{sh}^{2n+2}(t) dt = I_n + I_{n+1}$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = \operatorname{ch}(\alpha) - (2n+1)(I_{n+1} + I_n)$

QUESTION DE COURS 4. — Propriété. La suite de terme général $\cos(n\theta)$ converge SSI $\theta = 0 \ [2\pi]$.

PREUVE. Posons $u_n = \cos(n\theta)$. Puisque (u_n) est bornée (entre -1 et 1), elle ne tend pas vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Supposons que (u_n) admette une limite finie ℓ .

➤ Considérons la suite (u_{2n}) (suite extraite des termes pairs). Puisque (u_n) converge vers ℓ , alors d'après la propriété des suites extraites, (u_{2n}) converge elle aussi vers ℓ .

En outre : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = \cos(2n\theta) = 2\cos^2(n\theta) - 1 = 2u_n^2 - 1$. En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans cette relation, on obtient :

$$\ell = 2\ell^2 - 1 \iff 2\ell^2 - \ell - 1 = 0$$

Cette équation du second degré admet 1 comme racine évidente, et puisque le produit des racines est égal à " c/a ", on en déduit que la seconde racine est $-1/2$. D'où : $\boxed{(\ell = 1) \quad \vee \quad \left(\ell = -\frac{1}{2}\right) \quad (\spadesuit)}$.

➤ Par ailleurs, pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a :

$$u_{n+1} + u_{n-1} = \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(n\theta)\cos(\theta) = 2u_n\cos(\theta)$$

En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans cette relation, on obtient :

$$2\ell = 2\ell\cos(\theta) \iff \ell(\cos(\theta) - 1) = 0.$$

➤ Si $\cos(\theta) \neq 1$, on en déduit que : $\boxed{\ell = 0 \quad (\clubsuit)}$. Les assertions $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$ étant clairement incompatibles, la suite (u_n) n'a donc pas de limite finie (dans ce cas).

➤ En revanche, si $\cos(\theta) = 1$, c'est-à-dire si $\theta = 0 \ [2\pi]$, alors la suite (u_n) est convergente et de limite 1 (puisque elle est alors constante égale à 1).

Conclusion. La suite de terme général $\cos(n\theta)$ admet une limite (égale à 1) SSI $\theta = 0 \ [2\pi]$.

QUESTION DE COURS 5. — Propriété (groupe des permutations d'un ensemble) : $(S_E, \circ)$ est un groupe

PREUVE. Soit E un ensemble. Notons S_E l'ensemble des permutations de E , c-à-d des bijections de E dans lui-même.

➤ G1 - Loi de composition interne.

Si f et g sont deux bijections de E dans E , alors $f \circ g$ est encore une bijection de E dans E (la composée de deux bijections est encore une bijection).

On en déduit que si f et g sont dans S_E , alors $f \circ g$ est un élément de S_E . Donc la loi $\circ$ est une LCI sur S_E .

➤ G2 - Associativité. En outre, cette loi est associative, puisque la composition des applications l'est.

➤ G3 - Élément neutre.

L'identité de E (notée id_E) appartient à S_E (c'est une bijection de E dans E , par exemple car c'est une involution). Et id_E est évidemment l'élément neutre pour la composition puisque pour toute $f \in S_E$ on a : $f \circ \text{id}_E = f = \text{id}_E \circ f$.

➤ G4 - Inversibilité des éléments de S_E .

Si f est une bijection de E dans E , alors f admet une bijection réciproque f^{-1} , qui est encore une bijection de E dans E .

En d'autres termes, pour tout élément f de S_E , f^{-1} existe et $f^{-1} \in S_E$.

Conclusion. L'ensemble S_E est muni d'une loi de composition interne associative (la composition usuelle des applications), pour laquelle il existe un élément neutre (id_E), et où tout élément est inversible. Ainsi, $(S_E, \circ)$ est un groupe.

QUESTION DE COURS 6. — Propriété : pour tout entier naturel $n \geq 2$, $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$; et $(\mathbb{U}, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

PREUVE. Il est déjà connu que $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe (d'élément neutre 1); il s'agit en effet d'un groupe de référence, et ce fait n'a pas à être redémontré.

Montrons que $(\mathbb{U}, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$

► **(SG1)** $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}^*$: puisque tout nombre complexe de module 1 est non nul *.

► **(SG2)** $1 \in \mathbb{U}$ puisque 1 est de module 1.

► **(SG3)** $\forall (z, z') \in \mathbb{U}^2, z \times z' \in \mathbb{U}$ puisque $|z \times z'| = |z| \times |z'|$.

► **(SG4)** $\forall z \in \mathbb{U}, z^{-1} \in \mathbb{U}$ puisque $|z^{-1}| = |z|^{-1} = 1$.

Conclusion : $(\mathbb{U}, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Soit n un entier naturel ≥ 2 . Montrons que $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$

► **(SG1)** $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$: puisque si toute racine n -ième de l'unité est de module 1.

► **(SG2)** $1 \in \mathbb{U}_n$ puisque $1^n = 1$.

► **(SG3)** $\forall (z, z') \in \mathbb{U}_n^2, z \times z' \in \mathbb{U}_n$ puisque $(z \times z')^n = z^n \times z'^n = 1$.

► **(SG4)** $\forall z \in \mathbb{U}_n, z^{-1} \in \mathbb{U}_n$ puisque $(z^{-1})^n = (z^n)^{-1} = 1$.

Conclusion : $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$.

QUESTION DE COURS 7. — Propriétés des morphismes de groupes : si $f : (G, *) \longrightarrow (H, \#)$ est un morphisme de groupes, alors : 1/ $f(e_G) = e_H$ et 2/ $\forall g \in G, f(g^{-1}) = [f(g)]^{-1}$

PREUVE. Par hypothèse, on a : $f(e_G) = f(e_G * e_G) = f(e_G) \# f(e_G)$.

Par composition (pour la loi $\#$) avec $[f(e_G)]^{-1}$ (qui existe puisque H est un groupe), on en déduit : $(e_G) = e_H$.

Soit g un élément de G . On a : $f(g * g^{-1}) = f(g) \# f(g^{-1})$. D'autre part : $f(g * g^{-1}) = f(e_G) = e_H$

Ainsi : $f(g) \# f(g^{-1}) = e_H$ (♠).

En permutant les positions de g et g^{-1} dans le raisonnement précédent, on obtient : $f(g) \# f(g^{-1}) = e_H$ (♣)

On déduit de (♠) et (♣) que : $(g^{-1}) = [f(g)]^{-1}$

QUESTION DE COURS 8. — Propriété : si $f : (G, *) \longrightarrow (H, \#)$ est un morphisme de groupes, alors : 1/ $\ker f$ est un sous-groupe de G et 2/ $\operatorname{im} f$ est un sous-groupe de H

PREUVE. 1/ Montrons que $\ker f$ est un sous-groupe de G .

► **(SG1)** $\ker f \subset G$ par définition de noyau.

► **(SG2)** $e_G \in \ker f$ puisque $f(e_G) = e_H$ (question de cours précédente).

► **(SG3)** $\forall (g, g') \in (\ker f)^2, f(g * g') = f(e_G) \# f(e_G) = e_H \# e_H = e_H$. Donc : $g * g' \in \ker f$. La loi $*$ est donc une LCI dans $\ker f$.

► **(SG4)** Corollaire de la question de cours précédente.

Conclusion : $\ker f$ est un sous-groupe de G .

PREUVE. 2/ Montrons que $\operatorname{im} f$ est un sous-groupe de H .

► **(SG1)** $\operatorname{im} f \subset H$ par définition de d'image.

► **(SG2)** $e_H \in \operatorname{im} f$ puisque $e_H = f(e_G)$ (question de cours précédente).

► **(SG3)** Soient h et h' dans $\operatorname{im} f$. Il existe g et g' dans G tels que : $h = f(g)$ et $h' = f(g')$.

Alors : $f(g * g') = h \# h'$. Donc : $h \# h' \in \operatorname{im} f$. La loi $\#$ est donc une LCI dans $\operatorname{im} f$.

► **(SG4)** Corollaire de la question de cours précédente.

Conclusion : $\operatorname{im} f$ est un sous-groupe de H .

QUESTION DE COURS 9. — **Propriété** : si $f : (G, *) \longrightarrow (H, \#)$ est un morphisme de groupes, alors :

$$[\ker f = \{e_G\}] \iff [f \text{ injectif}]$$

PREUVE. ► Prouvons $\implies$.

Soient g et g' tels que : $f(g) = f(g')$. Alors : $f(g * g'^{-1}) = e_H$. Donc : $g * g'^{-1} \in \ker f$.

On en déduit (avec l'hypothèse) que $g * g'^{-1} = e_G$. D'où $g = g'$. D'où l'injectivité de f .

Réciproquement, supposons que f soit injectif. Soit $g \in G$ tel que $f(g) = e_H$. Alors : $f(g) = f(e_G)$. D'où $g = e_G$, puisque f est injectif. On en déduit $\ker f = \{e_G\}$.
