MPSI – Colle 13 (17 au 20 janvier 2023) : Calcul intégral, Suites, Structures algébriques

IMPORTANT ! Cette colle post-CB1 sera consacrée à de fraîches révisions : tout sur le calcul intégral et les suites. Les exos porteront exclusivement sur ces thèmes (chapitre 8 et 11 donc), tout comme les questions de cours “communes”. En revanche, les questions de cours “sur le principe du volontariat” porteront sur les structures algébriques (groupes et anneaux).

Précision à l’attention des colleurs : les suites “du type $u_{n+1} = f(u_n)$” n’ont pas encore été étudiées (elles le seront à l’issue du chapitre portant sur la continuité).

Cours

Chapitre 12 — Groupes, anneaux et corps

1 - Lois de composition interne

1.1 - Définition et exemples

1.2 - Elément neutre

1.3 - Eléments inversibles

2 - Groupes

2.1 - Généralités

2.2 - Groupes usuels

Notamment :

- Les groupes additifs : $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{D},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$, $(\mathbb{C}[X],+)$, $(\mathbb{R}_n[X],+)$, $\left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}},+\right)$, $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),+)$, $\left(\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),+\right)$, qui sont tous des groupes abéliens.

- Les groupes multiplicatifs : $(\mathbb{R}^*,\times)$, $\left(\mathbb{R}_+^*,\times\right)$, $(\mathbb{C}^*,\times)$, $(\mathbb{U},\times)$, $(\mathbb{U}_n,\times)$, $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}),\times)$ (les cinq premiers sont abéliens, le dernier ne l’est pas).

- Le groupe des bijections de E dans E : pour tout ensemble E, on note S_E l’ensemble des permutations de E, càd des bijections de E dans E. On peut affirmer que $(S_E,\circ)$ est un groupe, appelé groupe des permutations de E. En classe, seul S_3 a été étudié.

2.3 - Sous-groupes

2.4 - Morphismes de groupes

3 - Anneaux

4 - Corps

Exercices

Chapitre 8 — Méthodes de calcul intégral

Chapitre 11 — Suites réelles et complexes

Remarque : évidemment, comme d’habitude, une question d’un exercice peut faire intervenir une notion à connaître “pour toujours” : par exemple la formule du binôme de Newton, un calcul de dérivée, un DL usuel en 0, un calcul de somme géométrique ou télescopique, la définition de partie entière, une limite usuelle…

Questions de cours

- ➤ **Exercice** : pour tout réel x, on pose : $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\cos(t)}\,\mathrm{d}t$. Sens de variation, parité, signe et DL1 en 0 de φ.

- ➤ **Exercice** : pour tout entier naturel n, on pose : $J_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^{2n+1}\sin(t)\,\mathrm{d}t$. 1/ Montrer que la suite (J_n) est décroissante, et positive. 2/ Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{2n+2}$. En déduire la limite de (J_n).

- ➤ **Exercice** : pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^\alpha \mathrm{sh}^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$ (α réel quelconque). Etablir que : $I_{n+1} = \mathrm{ch}\,(\alpha) - (2n+1)\,(I_{n+1} + I_n)$.

- ➤ **Propriété**. La suite de terme général $\cos(n\theta)$ converge SSI $\theta = 0\ [2\pi]$.

Les 5 questions suivantes sont sur le principe du volontariat

- ➤ **Propriété (groupe des permutations d'un ensemble)** : $(S_E, \circ)$ est un groupe

- ➤ **Propriété** : pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$; et $(\mathbb{U}, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$

- ➤ **Propriétés des morphismes de groupes** : si $f : (G, *) \longrightarrow (H, \sharp)$ est un morphisme de groupes, alors : 1/ $f(\mathrm{e}_G) = \mathrm{e}_H$ et 2/ $\forall\, g \in G,\quad f\left(g^{-1}\right) = [f(g)]^{-1}$

- ➤ **Propriété** : si $f : (G, *) \longrightarrow (H, \sharp)$ est un morphisme de groupes, alors : 1/ $\ker f$ est un sous-groupe de G et 2/ $\mathrm{im} f$ est un sous-groupe de H

- ➤ **Propriété** : si $f : (G, *) \longrightarrow (H, \sharp)$ est un morphisme de groupes, alors :

$$[\ker f = \{\mathrm{e}_G\}] \Longleftrightarrow [f \text{ injectif}]$$