

COLLE 14 – QUESTIONS DE COURS

QUESTION DE COURS 1 — Propriété : la matrice identité I_n est l'élément neutre pour le produit matriciel. On montrera ici que : $\forall A \in M_n(\mathbb{K}), A \times I_n = A$ et on pourra admettre $I_n \times A = A$.

Soient n un entier naturel non nul, et $A = (a_{ij})$ une matrice de $M_n(\mathbb{K})$.

Notons $P = (p_{ij})$ la matrice produit $A \times I_n$. On rappelle que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (I_n)_{ij} = \delta_{ij}$.^{*}

Soient i et j deux entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On a : $P_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} (I_n)_{kj}$.

Or $(I_n)_{kj} = 0$ pour $k \neq j$, et $(I_n)_{jj} = 1$. Il s'ensuit que : $P_{ij} = a_{ij}$.

En résumé : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, P_{ij} = a_{ij}$. Donc $P = A$, et donc : $A \times I_n = A$.

Preuve de la partie admise. Notons $Q = (q_{ij})$ la matrice produit $I_n \times A$.

Soient i et j deux entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On a : $Q_{ij} = \sum_{k=1}^n (I_n)_{ik} a_{kj}$.

Or $(I_n)_{ik} = 0$ pour $k \neq i$, et $(I_n)_{ii} = 1$. Il s'ensuit que : $Q_{ij} = a_{ij}$.

En résumé : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, Q_{ij} = a_{ij}$. Donc $Q = A$, et donc : $I_n \times A = A$.

QUESTION DE COURS 2 — Exercice : pour tout $N \in \mathbb{N}$, calculer A^N avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Observons que : $A = 2I_3 + B$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

► On a : $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^3 = 0_{M_3(\mathbb{K})}$. Ainsi : $\forall k \in \mathbb{N}, (k \geq 3) \implies (B^k = 0_{M_3(\mathbb{K})})$ (♠).[†]

► On a : $(2I_3) \times B = B \times (2I_3)$ (♣). En effet, toute matrice de la forme (λI_3) [‡] commute avec toute matrice de $M_3(\mathbb{K})$.

► Soit N un entier naturel. On a : $A^N = (2I_3 + B)^N$. Grâce à (♣), on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour écrire :

$$A^N = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} B^k (2I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} 2^{N-k} B^k$$

D'après (♠), on a encore : $A^N = \sum_{k=0}^2 \binom{N}{k} 2^{N-k} B^k = 2^N \underbrace{B^0}_{=I_3} + N 2^{N-1} B + \frac{N(N-1)}{2} 2^{N-2} B^2$

Explicitement :

$$A^N = \begin{pmatrix} 2^N & 0 & 0 \\ 0 & 2^N & 0 \\ 0 & 0 & 2^N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & N 2^{N-1} & N 2^{N-1} \\ 0 & 0 & N 2^{N-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & N(N-1) 2^{N-3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*. Où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker, càd : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

†. Ainsi la matrice B est nilpotente.

‡. Une telle matrice est appelée matrice **scalaire**.

D'où finalement :

$$\forall N \in \mathbb{N}, A^N = \begin{pmatrix} 2^N & N2^{N-1} & N(N+3)2^{N-3} \\ 0 & 2^N & N2^{N-1} \\ 0 & 0 & 2^N \end{pmatrix}$$

QUESTION DE COURS 3 — Propriété : le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale, et plus précisément :

$$\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \times \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) = \text{diag}(\lambda_1\mu_1, \dots, \lambda_n\mu_n)$$

Soient $2n$ scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \mu_1, \dots, \mu_n$. Posons $A = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $B = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ et $P = AB$.

► Commençons par montrer que P est diagonale : soient i et j deux entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $i \neq j$.

$$\text{Alors : } P_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = a_{ii}b_{ij} = \lambda_i \times \underbrace{b_{ij}}_{=0 \text{ (} B \text{ diag)}} = 0.$$

Ainsi : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, [i \neq j] \implies [P_{ij} = 0]$. D'où : P est diagonale.

► Déterminons à présent les coefficients diagonaux de P . Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a :

$$P_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki} = a_{ii}b_{ii} = \lambda_i\mu_i$$

Ainsi : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P_{ii} = \lambda_i\mu_i$.

Conclusion. P est diagonale et $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P_{ii} = \lambda_i\mu_i$. Ainsi :

$$\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \times \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) = \text{diag}(\lambda_1\mu_1, \dots, \lambda_n\mu_n)$$

QUESTION DE COURS 4 — Théorème : toute matrice de $M_n(\mathbb{K})$ s'écrit de manière unique (à l'ordre près) comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique, soit

$$\forall M \in M_n(\mathbb{K}), \exists! (S, A) \in S_n(\mathbb{K}) \times A_n(\mathbb{K}), M = S + A$$

On raisonne par analyse-synthèse. Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$.

► Analyse : supposons qu'il existe une matrice symétrique S et une matrice antisymétrique A telles que : $M = S + A$.

Alors : ${}^tM = {}^tS + {}^tA$. Or par hypothèse ${}^tS = S$ et ${}^tA = -A$. On a donc : ${}^tM = S - A$.

Il s'ensuit que S et A sont solutions du système : $\begin{cases} S + A = M \\ S - A = {}^tM \end{cases}$

La résolution aisée de celui-ci donne : $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$.

► Synthèse : il ne reste plus qu'à vérifier que le couple (S, A) obtenu précédemment convient. Pour cela on commence par s'assurer que $M = S + A$ (trivial). En outre :

► en posant $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$, on a : ${}^tS = \frac{1}{2}({}^tM + {}^t({}^tM)) = \frac{1}{2}({}^tM + M) = \frac{1}{2}(M + {}^tM) = S$; donc S est symétrique ;

► et en posant $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$, on a : ${}^tA = \frac{1}{2}({}^tM - M) = -\frac{1}{2}(M - {}^tM) = -A$; donc A est antisymétrique.

Conclusion (partielle) : nous venons d'établir l'existence, pour toute matrice carrée M d'un couple (S, A) (avec S symétrique et A antisymétrique) tel que : $M = S + A$.

En outre, ce couple est explicitement donné par les formules : $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$.

Pour achever la preuve du théorème, il reste à établir l'unicité du couple (S, A) .

► **Unicité** : supposons qu'il existe deux couples (S, A) et (S', A') tels que $S + A = M$ et $S' + A' = M$, avec S et S' symétriques, et A et A' antisymétriques. Dans ce cas : $S + A = S' + A'$, d'où $S - S' = A' - A$.

Dans cette dernière égalité la matrice de gauche $(S - S')$ est symétrique (puisque S et S' le sont) ; mais elle est aussi antisymétrique, car égale à $A' - A$ (et A et A' sont antisymétriques).

Or la seule matrice symétrique et antisymétrique est la matrice nulle. On en déduit donc que $S - S' = 0_{M_n(\mathbb{K})}$ d'où $S = S'$; et $A' - A = 0_{M_n(\mathbb{K})}$ d'où $A = A'$. Par suite les couples (S, A) et (S', A') sont égaux, ce qui prouve l'unicité et complète la démonstration du théorème.

QUESTION DE COURS 5 — Propriété : le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices triangulaires supérieures de $M_n(\mathbb{K})$. Par définition (de $T_n^+(\mathbb{K})$), on a :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (i > j) \implies (a_{ij} = 0 \wedge b_{ij} = 0) \quad (\spadesuit)$$

Notons $P = A \times B$. Soient i et j deux entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$, avec $i > j$ (

$$\text{On a : } P_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=i}^n a_{ik}b_{kj}.$$

Dans la somme : $\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}b_{kj}$ on a $k < i$, donc $a_{ik} = 0$ (d'après (\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}b_{kj} = 0.

Dans la somme : $\sum_{k=i}^n a_{ik}b_{kj}$ on a $k \geq i$ d'où $k > j$ (d'après (b_{kj} = 0 (d'après (

$$\sum_{k=i}^n a_{ik}b_{kj} = 0.$$

Finalement $P_{ij} = 0$. En résumé, on a établi que : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (i > j) \implies (P_{ij} = 0)$; ce qui signifie exactement que $P \in T_n^+(\mathbb{K})$.

Conclusion : $\forall (A, B) \in T_n^+(\mathbb{K})^2, A \times B \in T_n^+(\mathbb{K})$ (la matrice produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure)

Remarques :

- 1) La propriété ci-dessus est l'ingrédient le moins trivial pour établir que $(T_n^+(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau (un sous-anneau de $M_n(\mathbb{K})$). Dès que $n \geq 2$ [§], cet anneau est non commutatif et non intègre.
- 2) On démontre sur le même plan que ci-dessus que la matrice produit de deux matrices triangulaires inférieures est une matrice triangulaire inférieure. On peut encore établir que $(T_n^-(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau (un sous-anneau de $M_n(\mathbb{K})$), toujours non commutatif et non intègre pour $n \geq 2$.

QUESTION DE COURS 6 — Théorème (Caractérisation de $GL_n(\mathbb{K})$). Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

A est inversible si et seulement si pour tout $B \in \mathbb{K}^n$, le système $AX = B$ admet une (unique) solution.

Lorsque tel est le cas, l'unique solution du système $AX = B$ est $A^{-1}B$.

§. C'est dès que l'on considère des "vraies" matrices.

PREUVE. On raisonne par double implication. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

► Supposons que A est inversible. Soit $B \in \mathbb{K}^n$ un vecteur quelconque.

Alors $A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = I_n B = B$. Donc le vecteur $X_0 = A^{-1}B$ est solution du système $AX = B$.

Etablissons son unicité : soit $X_1 \in \mathbb{K}^n$ un vecteur solution du système $AX = B$. Alors : $AX_0 = AX_1$. Puisque A est inversible, on en déduit que : $X_0 = X_1$ (il suffit de multiplier à gauche par A^{-1} les deux termes de l'égalité précédente).

En résumé : si A est inversible, alors pour tout $B \in \mathbb{K}^n$, le système $AX = B$ admet une unique solution.

► Réciproquement, supposons que pour tout $B \in \mathbb{K}^n$, le système $AX = B$ admet une unique solution.

$$\text{Notons alors : } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit j un entier quelconque entre 1 et n . Par hypothèse, il existe un unique vecteur X_j tel que : $AX_j = e_j$.

$$\text{En notant } X_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}, \text{ ceci signifie que : } A \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow j\text{-ème place}$$

Formons alors une matrice C en concaténant les colonnes $X_1, \dots, X_n$ (dans l'ordre) :

$$C = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \underbrace{x_{n1}}_{X_1} & \cdots & \underbrace{x_{nj}}_{X_j} & \cdots & \underbrace{x_{nn}}_{X_n} \end{pmatrix}$$

Alors, par construction des vecteurs X_j , on a :

$$AC = A \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \underbrace{x_{n1}}_{X_1} & \cdots & \underbrace{x_{nj}}_{X_j} & \cdots & \underbrace{x_{nn}}_{X_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \underbrace{1}_{e_1} & \cdots & \underbrace{0}_{e_j} & \cdots & \underbrace{1}_{e_n} \end{pmatrix} = I_n$$

Une nouvelle application de la propriété suivant laquelle $A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible SSI il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$ ou $BA = I_n$ permet de conclure que A est inversible et que $A^{-1} = C$.

En résumé : si pour tout $B \in \mathbb{K}^n$, le système $AX = B$ admet une (unique) solution, alors A est inversible.

Ce qui achève la preuve de la réciproque, et donc de l'équivalence du théorème.