Problème de la semaine 6

Exercice 1 — (Applications du calcul matriciel) Dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, on considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

➤ **Partie A - Calcul des puissances de A.**

1/ Montrer que P est inversible et calculer son inverse.

2/ On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D (on vérifiera que D est une matrice diagonale).

3/ Soit n un entier naturel. Exprimer D^n en fonction de n.

4/ Montrer que pour tout entier naturel n, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.

➤ **Partie B - Etude du commutant de A.** On rappelle que pour une matrice $N \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, le commutant de N désigne l'ensemble noté $\mathrm{COM}(N)$ des matrices $Q \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec N, c'est-à-dire telles que $NQ = QN$.

5/ Soit $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. Etablir l'équivalence : $[M \in \mathrm{COM}(A)] \Longleftrightarrow [P^{-1}MP \in \mathrm{COM}(D)]$

6/ Déterminer $\mathrm{COM}(D)$.

7/ Déduire de ce qui précède $\mathrm{COM}(A)$.

8/ Etablir l'existence de trois matrices B_1, B_2 et B_3 dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on explicitera telles que :

$$\forall\, M \in \mathrm{COM}(A),\ \exists\, (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3,\ M = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \alpha_3 B_3$$

➤ **Partie C - Application à l'étude de trois suites imbriquées.** On définit trois suites réelles u, v et w en posant :

$$u_0 = 1,\ v_0 = 1,\ w_0 = 0 \text{ et : } \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{n+1} = -3u_n - v_n - 3w_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 3v_n \\ w_{n+1} = 2u_n + v_n + 2w_n \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

Soit n un entier naturel quelconque.

9/ Etablir une relation de récurrence entre X_{n+1} et X_n.

10/ Déduire de ce qui précède une relation entre X_n et X_0.

11/ Déterminer les expressions des termes généraux u_n, v_n et w_n en fonction de n.