CONCOURS BLANC JANVIER 2023

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures — Calculatrices interdites

Les résultats doivent être <u>soulignés</u> ou $\boxed{\text{encadrés}}$.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Le sujet est composé de 3 exercices indépendants.

EXERCICE 1 — (EQUATION)

Dans cet exercice, on se propose de résoudre l'équation

$$(\text{E}) : \qquad x^3 - 12x - 8 = 0$$

1/ Questions préliminaires. Dans une assez large mesure, les questions 1-a/ à 1-e/ sont indépendantes.

a/ Etudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 12x - 8$.

En déduire le nombre de solutions réelles de l'équation (E).

b/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^2 - 8x + 64 = 0$ (on pourra observer que $\sqrt{192} = 8\sqrt{3}$).

c/ Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes.

Vérifier que z_1 et z_2 sont solutions de l'équation $X^2 - SX + P = 0$, où S et P désignent respectivement la somme et le produit de z_1 et z_2.

d/ Soit ω un nombre complexe non nul, et soit z un complexe tel que $z^3 = \omega$.

Exprimer le module et l'argument de z en fonction de ceux de ω.

e/ Déterminer les racines cubiques (càd les racines troisièmes) dans $\mathbb{C}$ de $\omega = 4 + 4\text{i}\sqrt{3}$.

2/ Résolution de (E). Dans cette question, on cherche une solution de (E) sous la forme $x = u + v$, avec u et v deux complexes.

a/ On suppose que x est solution de (E), et que $uv = 4$. Montrer que : $\quad u^3 + v^3 = 8$.

b/ En déduire que sous ces hypothèses, u^3 et v^3 sont solutions d'une équation du second degré que l'on précisera.

c/ A l'aide de ce qui précède, déterminer les valeurs exactes des solutions de (E).

Exercice 2 — (Irrationnalité de e)

L'objectif de cet exercice est de prouver que le nombre exp(1), noté e, est un nombre irrationnel.

Les parties A et B sont dans une large mesure indépendantes.

Partie A

Soit n un entier naturel non nul. On pose :

$$R_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \end{array}$$

On considère par ailleurs l'équation différentielle (E) : $y' - y = \dfrac{x^n}{n!}$.

1/ Donner l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation homogène associée à (E). *

2/ Utiliser la méthode de la variation de la constante pour trouver une solution particulière de (E) ; on exprimera cette solution à l'aide d'une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer.

3/ Donner l'ensemble des solutions à valeurs réelles de (E). †

4/ Prouver que R_n est une solution de E.

5/ Déduire des questions précédentes que pour tout réel x on a :

$$R_n(x) = \mathrm{e}^x \int_0^x \frac{t^n \mathrm{e}^{-t}}{n!} \,\mathrm{d}t$$

6/ Montrer que, pour tout réel positif x on a :

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{x^{n+1}\mathrm{e}^x}{(n+1)!}$$

7/ En déduire que, pour tout réel positif x, e^x est la limite d'une suite (dont l'expression ne fait pas intervenir exp).

---

*. Càd déterminer la solution générale à valeurs réelles de l'équation homogène associée à (E).
†. Càd déterminer la solution générale à valeurs réelles de l'équation (E).

Partie B

On considère à présent deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

8/ Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont strictement monotones.

9/ Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

10/ Justifier l'existence et l'unicité d'un réel ℓ qui vérifie :

$$\forall q \in \mathbb{N}^*, \quad u_q < l < v_q$$

11/ Supposons que ℓ soit rationnel, il est alors possible de l'écrire sous la forme d'un quotient $\ell = \dfrac{p}{q}$ avec p et q entiers. En utilisant la question précédente, montrer que c'est absurde.

12/ Conclure à l'irrationnalité de e.

Exercice 3 — (Un calcul de $\zeta(2)$)

L'objectif de cet exercice est de montrer que la somme des inverses des carrés des entiers

$$\mathbf{S}_N = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{N^2}$$

admet une limite finie lorsque N tend vers $+\infty$, et de calculer cette limite. ‡

On pose, pour tout entier naturel n :

$$\mathbf{C}_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \mathbf{D}_n = \int_0^{\pi/2} x^2 \cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x$$

1/ Stricte positivité de $\mathbf{C}_n$.

a/ Justifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{C}_n \geqslant 0$$

Le but des questions 1-b/ et 1-c/ est de prouver que cette inégalité est stricte.

b/ Justifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{C}_n \geqslant \int_0^{\pi/4} \cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x$$

c/ En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{C}_n \geqslant \frac{1}{2^n} > 0$$

‡. Pour information, cette limite est notée $\zeta(2)$ en référence à la fonction zêta de Riemann (zêta est une lettre grecque, notée ζ).

2/ Relations de récurrence.

a/ A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{C}_n = (2n-1)\,(\mathbf{C}_{n-1} - \mathbf{C}_n)$$

On pourra observer que pour tout x réel : $\cos^{2n}(x) = \cos(x) \times \cos^{2n-1}(x)$.

b/ En déduire que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos^{2n-2}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathbf{C}_n}{2n-1} = \frac{\mathbf{C}_{n-1}}{2n}$$

c/ Etablir que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{C}_n = (2n-1)\,n\mathbf{D}_{n-1} - 2n^2\mathbf{D}_n$$

d/ En déduire que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n^2} = 2\left(\frac{\mathbf{D}_{n-1}}{\mathbf{C}_{n-1}} - \frac{\mathbf{D}_n}{\mathbf{C}_n}\right)$$

3/ Majoration de $\mathbf{D}_n$. On admet que : $\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad x \leqslant \frac{\pi}{2}\sin(x)$

En déduire que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{D}_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}\frac{\mathbf{C}_n}{2n+2}$$

4/ Calcul de $\zeta(2)$. Pour tout entier naturel N non nul, on pose :

$$\mathbf{S}_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$$

a/ Etablir que :

$$\forall\, N \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{S}_N = \frac{\pi^2}{6} - 2\frac{\mathbf{D}_N}{\mathbf{C}_N}$$

b/ Déduire des questions précédentes la limite de $\mathbf{S}_N$ lorsque N tend vers $+\infty$.

Fin de l'épreuve