CONCOURS BLANC JANVIER 2023

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques

Exercice 1 — (Equation)

Dans cet exercice, on se propose de résoudre l'équation

$$\text{(E)} : \qquad x^3 - 12x - 8 = 0$$

1/ Questions préliminaires. Dans une assez large mesure, les questions 1-a/ à 1-e/ sont indépendantes.

a/ Etudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 12x - 8$. En déduire le nombre de solutions réelles de l'équation (E).

La fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^3 - 12x - 8$ est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x réel on a : $f'(x) = 3x^2 - 12$, soit encore : $f'(x) = 3\,(x-2)\,(x+2)$. On en déduit le signe de f' et le tableau de variation ci-contre.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$			0		0		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	8	$\searrow$	-24	$\nearrow$	$+\infty$

Sur chacun des intervalles $]-\infty;-2]$, $[-2;2]$ et $[2;+\infty[$ la fonction f est continue et strictement monotone. En outre 0 appartient à l'image par f de chacun de ces intervalles. On en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions réelles (une dans chaque intervalle).

Conclusion. L'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions dans $\mathbb{R}$.

b/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^2 - 8x + 64 = 0$.

Considérons l'équation $x^2 - 8x + 64 = 0$. Son discriminant est $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 64 = -192$. Puisque $\Delta < 0$, et que les coefficients de cette équation sont réels, elle admet deux racines complexes conjuguées :

$$\frac{8 \pm \mathrm{i}\sqrt{192}}{2} = \frac{8 \pm 8\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = 4 \pm 4\mathrm{i}\sqrt{3}$$

Conclusion. Les solutions de $x^2 - 8x + 64 = 0$ sont $4 \pm 4\mathrm{i}\sqrt{3}$

c/ Soient z_1 et z_2 deux complexes. Justifier que z_1 et z_2 sont solutions de l'équation $X^2 - SX + P = 0$, où S et P désignent respectivement la somme et le produit de z_1 et z_2.

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. Considérons l'équation $X^2 - (z_1 + z_2)\,X + z_1 z_2 = 0$. Le complexe z_1 est solution de cette équation puisque $z_1^2 - (z_1 + z_2)\,z_1 + z_1 z_2 = z_1^2 - z_1^2 - z_1 z_2 + z_1 z_2 = 0$. Vérification analogue pour z_2.

Conclusion. z_1 et z_2 sont solutions de $X^2 - SX + P = 0$, avec $S = z_1 + z_2$ et $P = z_1 z_2$. [*]

---

*. L'intérêt de cette question était de vous rappeler les relations existant entre les coefficients et les racines d'une équation polynomiale du second degré.

d/ Soit ω un nombre complexe non nul, et soit z un complexe tel que $z^3 = \omega$. Exprimer le module et l'argument de z en fonction de ceux de ω.

Soit z un complexe tel que $z^3 = \omega$. Cette égalité implique que z est non nul ; on peut donc écrire z sous forme exponentielle : $z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(z)}$.

Ainsi :

$$z^3 = \omega \Longleftrightarrow \left(|z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(z)}\right)^3 = |\omega|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(\omega)} \Longleftrightarrow |z|^3\,\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\arg(z)} = |\omega|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(\omega)}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} |z|^3 & = & |\omega| \\ 3\arg(z) & = & \arg(\omega)\ [2\pi] \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} |z| & = & |\omega|^{1/3} \\ \arg(z) & = & \dfrac{\arg(\omega)}{3}\ \left[\dfrac{2\pi}{3}\right] \end{array}\right.$$

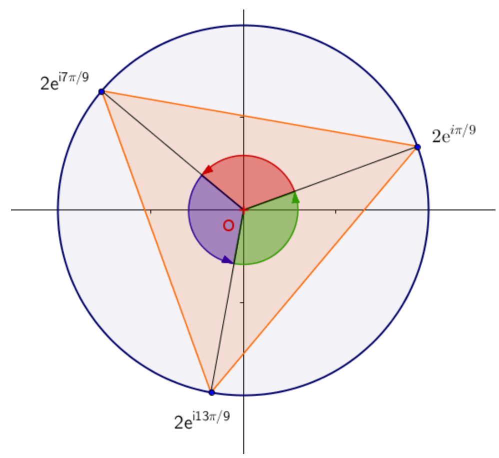
$$\boxed{\textbf{Conclusion. } [z^3 = \omega] \Longleftrightarrow \left[\left\{\begin{array}{rcl} |z| & = & |\omega|^{1/3} \\ \arg(z) & = & \dfrac{\arg(\omega)}{3}\ \left[\dfrac{2\pi}{3}\right] \end{array}\right.\right]}$$

e/ Déterminer les racines cubiques dans $\mathbb{C}$ de $\omega = 4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}$.

Les racines cubiques de $4+4\mathrm{i}\sqrt{3}$ sont les nombres complexes z tels que $z^3 = 4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}$. On les obtient à l'aide du raisonnement précédent (appliqué avec $\omega = 4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}$).

Comme : $\left|4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = 8$ et $\arg\left(4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}\right) = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$, les racines cubiques de $4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}$ sont :

$$2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/9},\ 2\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\pi/9)+(2\mathrm{i}\pi/3)} = 2\mathrm{e}^{7\mathrm{i}\pi/9} \text{ et } 2\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\pi/9)+(4\mathrm{i}\pi/3)} = 2\mathrm{e}^{13\mathrm{i}\pi/9}$$



$$\boxed{\textbf{Conclusion. } \text{Les racines cubiques de } 4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3} \text{ sont } 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/9},\ 2\mathrm{e}^{7\mathrm{i}\pi/9} \text{ et } 2\mathrm{e}^{13\mathrm{i}\pi/9}}$$

Illustration : *à droite on a représenté les racines cubiques de $4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}$. Ce sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 2.*

2/ Résolution de (E). Dans cette question, on cherche une solution de (E) sous la forme $x = u + v$, avec u et v deux complexes.

a/ On suppose que x est solution de (E), et que $uv = 4$. Montrer que : $u^3 + v^3 = 8$.

Dans cette question, on fait donc l'hypothèse que u et v sont deux nombres complexes tels que : $(u+v)$ est solution de (E), et $uv = 4$.

Commençons par exploiter la première hypothèse. Puisque $(u+v)$ est solution de (E), on a :

$$(u+v)^3 - 12\,(u+v) = 8 \Longleftrightarrow (u+v)\left[(u+v)^2 - 12\right] = 8 \Longleftrightarrow (u+v)\left[u^2 + 2uv + v^2 - 12\right] = 8$$

et puisque $uv = 4$ par hypothèse, on en déduit que :

$$(u+v)^3 - 12\,(u+v) = 8 \Longleftrightarrow (u+v)\,[u^2+v^2-4] = 8 \Longleftrightarrow u^3 + uv^2 - 4u + u^2v + v^3 - 4v = 8$$

et en observant que $u^2v = (uv)\,u = 4u$ et $uv^2 = (uv)\,v = 4v$, on obtient finalement :

$$(u+v)^3 - 12\,(u+v) = 8 \Longleftrightarrow u^3 + v^3 = 8$$

Conclusion. Sous l'hypothèse $uv = 4$, $(u+v)$ est solution de (E) SSI $u^3+v^3 = 8$

b/ En déduire que sous ces hypothèses, u^3 et v^3 sont solutions d'une équation du second degré que l'on précisera.

Sous les hypothèses de la question précédente, on a : $\begin{cases} uv &= 4 \\ u^3+v^3 &= 8 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u^3v^3 &= 64 \\ u^3+v^3 &= 8 \end{cases}$

Ce système donnant la somme et le produit des complexes u^3 et v^3, on peut affirmer (grâce à la question 1.c) que u^3 et v^3 sont solutions de l'équation $x^2 - 8x + 64 = 0$.

Conclusion. Si u et v sont deux complexes tels que $uv = 4$ et $(u+v)$ est solution de (E), alors u^3 et v^3 sont solutions de l'équation $x^2 - 8x + 64 = 0$.

c/ A l'aide de ce qui précède, déterminer les valeurs exactes des solutions de (E).

Si u^3 est solution de $x^2 - 8x + 64 = 0$, alors $u^3 = 4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}$ ou $u^3 = 4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}$ (d'après la question 1.b).

Dans le premier cas, u^3 est une racine cubique de $4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}$ d'où : $u = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/9}$, $2\mathrm{e}^{7\mathrm{i}\pi/9}$ ou $2\mathrm{e}^{13\mathrm{i}\pi/9}$ (d'après 1.e).

Dans le second cas, u^3 une racine cubique de $4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}$ et un "copier-coller-adapter" de la question 1.b permet d'obtenir que : $u = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/9}$, $2\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/9}$ ou $2\mathrm{e}^{11\mathrm{i}\pi/9}$.

Le même raisonnement étant valable pour v^3, on en déduit que les couples (u,v) de racines de $x^2 - 8x + 64 = 0$ sont tous ceux obtenus en donnant à u et v une des six valeurs :

$$2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/9}, \quad 2\mathrm{e}^{7\mathrm{i}\pi/9}, \quad 2\mathrm{e}^{13\mathrm{i}\pi/9}, \quad 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/9}, \quad 2\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/9} \quad \text{ou} \quad 2\mathrm{e}^{11\mathrm{i}\pi/9}$$

que l'on peut encore écrire pour clarifier les choses :

$$2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/9}, \quad 2\mathrm{e}^{7\mathrm{i}\pi/9}, \quad 2\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}\pi/9}, \quad 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/9}, \quad 2\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/9} \quad \text{ou} \quad 2\mathrm{e}^{-7\mathrm{i}\pi/9}$$

Reste à faire un peu de ménage parmi ces 36 couples solutions potentiels, et à ne conserver que ceux pour lesquels le produit uv vaut 4 ; c'est-à-dire tous ceux pour lesquels u et v sont conjugués.

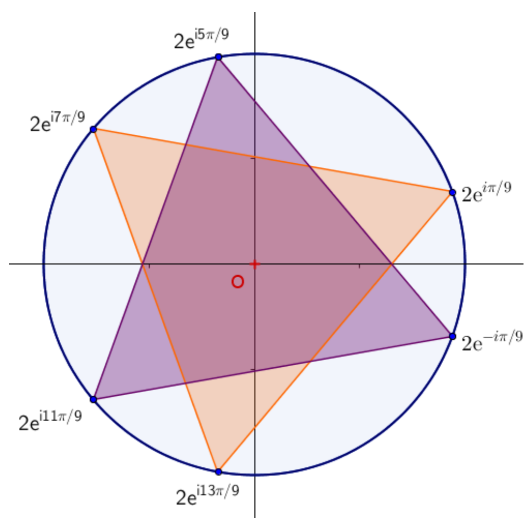


Illustration : à droite on a représenté les racines cubiques de $\omega = 4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}$, ainsi que celles de son conjugué $\overline{\omega} = 4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}$.

Les triangles équilatéraux ayant pour sommet les racines cubiques de chacun de ces complexes sont symétriques par rapport à l'axe réel, ce qui provient du fait que les racines cubiques de ω et de $\overline{\omega}$ sont deux à deux conjuguées.

Conclusion intermédiaire : les couples (u,v) de complexes solutions de $x^2-8x+64=0$ et tels que $uv=4$ sont :

$\left(2e^{i\pi/9}, 2e^{-i\pi/9}\right)$; $\left(2e^{5i\pi/9}, 2e^{-5i\pi/9}\right)$; $\left(2e^{7i\pi/9}, 2e^{-7i\pi/9}\right)$; $\left(2e^{-i\pi/9}, 2e^{i\pi/9}\right)$; $\left(2e^{-5i\pi/9}, 2e^{5i\pi/9}\right)$ et $\left(2e^{-7i\pi/9}, 2e^{7i\pi/9}\right)$.

D'après la question 2.a), chacun des couples (u,v) listés ci-dessus donne lieu à une solution $(u+v)$ de l'équation (E) si et seulement si $u^3+v^3=8$. Or :

➤ si $(u,v)=\left(2e^{i\pi/9}, 2e^{-i\pi/9}\right)$: alors $u^3+v^3=8\left(e^{i\pi/3}+e^{-i\pi/3}\right)=16\cos(\pi/3)=8$. Donc $\left(2e^{i\pi/9}+2e^{-i\pi/9}\right)$ est solution de (E).

➤ si $(u,v)=\left(2e^{5i\pi/9}, 2e^{-5i\pi/9}\right)$: alors $u^3+v^3=8\left(e^{5i\pi/3}+e^{-5i\pi/3}\right)=16\cos(5\pi/3)=8$. Donc $\left(2e^{5i\pi/9}+2e^{-5i\pi/9}\right)$ est solution de (E).

➤ si $(u,v)=\left(2e^{7i\pi/9}, 2e^{-7i\pi/9}\right)$: alors $u^3+v^3=8\left(e^{i\pi/3}+e^{-i\pi/3}\right)=16\cos(\pi/3)=8$. Donc $\left(2e^{7i\pi/9}+2e^{-7i\pi/9}\right)$ est solution de (E).

On peut aisément vérifier que les trois autres couples ne donnent pas lieu à d'autres solutions.

En résumé, on vient d'établir que les réels $4\cos(\pi/9)$, $4\cos(5\pi/9)$ et $4\cos(7\pi/9)$ sont solutions de (E). Puisque $\pi/9$, $5\pi/9$ et $7\pi/9$ sont trois réels distincts de $[0;\pi]$ et que la fonction cos est strictement monotone sur cet intervalle, les trois réels $4\cos(\pi/9)$, $4\cos(5\pi/9)$ et $4\cos(7\pi/9)$ sont distincts. Comme par ailleurs l'équation (E) possède exactement trois racines réelles (d'après la question 1.a), on peut enfin conclure.

Conclusion. L'équation $x^3-12x-8=0$ possède exactement 3 solutions réelles : $4\cos(\pi/9)$, $4\cos(5\pi/9)$ et $4\cos(7\pi/9)$.

EXERCICE 2 — **(UN CALCUL DE $\zeta(2)$)**

On pose, pour tout entier naturel n :

$$\mathbf{C}_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \mathbf{D}_n = \int_0^{\pi/2} x^2\cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x$$

1/ Stricte positivité de $\mathbf{C}_n$.

a/ Justifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{C}_n \geqslant 0$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \longmapsto \cos^{2n}(x)$ est positive sur $[0, \pi/2]$.

Par positivité de l'intégrale, on en déduit que : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{C}_n \geqslant 0$

Le but des questions 1-b/ et 1-c/ est de prouver que cette inégalité est stricte.

b/ Justifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{C}_n \geqslant \int_0^{\pi/4} \cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la relation de Chasles pour les intégrales, on a :

$$\mathbf{C}_n = \int_0^{\pi/4} \cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x$ est positive (positivité de l'intégrale de nouveau), ce qui permet de conclure.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{C}_n \geqslant \displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x$

c/ En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{C}_n \geqslant \frac{1}{2^n} > 0$$

➤ Pour $n = 0$, on a : $\mathbf{C}_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2} \geqslant \dfrac{1}{2^0}$.

➤ Pour $n = 1$, on a : $\mathbf{C}_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} 21 + \cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$; et $\dfrac{\pi}{4} \geqslant \dfrac{1}{2^1}$.

➤ Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a : $\mathbf{C}_n \geqslant \displaystyle\int_0^{\pi/6} \cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x$.

Or : $\forall x \in [0, \pi/6]$, $\cos(x) \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Il s'ensuit que : $\forall x \in [0, \pi/6]$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\cos^{2n}(x) \geqslant \dfrac{3^n}{2^{2n}}$

On en déduit, par croissance de l'intégrale : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\mathbf{C}_n \geqslant \dfrac{\pi}{6} \times \dfrac{3^n}{2^{2n}}$ $(\spadesuit)$

Enfin pour tout entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ on a :

$$\frac{\dfrac{\pi}{6} \times \dfrac{3^n}{2^{2n}}}{\dfrac{1}{2^n}} = \frac{\pi}{6} \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

La suite de terme général $\dfrac{\pi}{6} \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ est croissante (géométrique de raison supérieure à 1 et de premier terme positif), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \ \frac{\pi}{6} \times \left(\frac{3}{2}\right)^n \geqslant \frac{\pi}{6} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{6} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3\pi}{8} \geqslant 1$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \frac{\pi}{6} \times \frac{3^n}{2^{2n}} \geqslant \frac{1}{2^n} \qquad (\clubsuit)$$

D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \mathbf{C}_n \geqslant \frac{1}{2^n}$$

$\boxed{\textbf{Conclusion. } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{C}_n \geqslant \dfrac{1}{2^n} > 0}$

2/ Relations de récurrence.

a/ A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{C}_n = (2n - 1)\left(\mathbf{C}_{n-1} - \mathbf{C}_n\right)$$

On pourra observer que pour tout x réel : $\cos^{2n}(x) = \cos(x) \times \cos^{2n-1}(x)$.

Soit n un entier naturel non nul. On a : $\mathbf{C}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x$.

Pour tout réel $x \in [0, \pi/2]$ on pose :

$$\left\{\begin{array}{l} u(x)=\sin(x) \\ \\ v(x)=\cos^{2n-1}(x) \end{array}\right. \qquad \text{d'où :} \quad \left\{\begin{array}{l} u'(x)=\cos(x) \\ \\ v'(x)=-(2n-1)\sin(x)\cos^{2n-2}(x) \end{array}\right.$$

Selon les théorèmes généraux, les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi/2]$. La formule d'intégration par parties permet alors d'écrire :

$$\mathbf{C}_n = \underbrace{\left[\sin(x)\cos^{2n-1}(x)\right]_0^{\pi/2}}_{=0} + (2n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos^{2n-2}(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\iff \mathbf{C}_n = (2n-1)\int_0^{\pi/2} \left(1-\cos^2(x)\right)\cos^{2n-2}(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\iff \mathbf{C}_n = (2n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2}(x)-\cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\iff \mathbf{C}_n = (2n-1)\left(\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2}(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi/2}\cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

$$\iff \mathbf{C}_n = (2n-1)\left(\mathbf{C}_{n-1}-\mathbf{C}_n\right)$$

Conclusion. $\forall\, n\in\mathbb{N}^*, \quad \mathbf{C}_n = (2n-1)\left(\mathbf{C}_{n-1}-\mathbf{C}_n\right)$

b/ Etablir que :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*, \qquad \int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos^{2n-2}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathbf{C}_n}{2n-1} = \frac{\mathbf{C}_{n-1}}{2n}$$

Soit n un entier naturel non nul. D'après les calculs de la question précédente :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos^{2n-2}(x)\,\mathrm{d}x = \mathbf{C}_{n-1}-\mathbf{C}_n$$

Or, toujours d'après la question précédente, on a : $\mathbf{C}_{n-1}-\mathbf{C}_n = \dfrac{\mathbf{C}_n}{2n-1}$.

Par conséquent : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos^{2n-2}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathbf{C}_n}{2n-1} \qquad (\spadesuit)$

D'autre part, on a établi que : $\mathbf{C}_n = (2n-1)\left(\mathbf{C}_{n-1}-\mathbf{C}_n\right)$. Donc : $2n\mathbf{C}_n = (2n-1)\mathbf{C}_{n-1}$.
D'où : $\dfrac{\mathbf{C}_n}{2n-1} = \dfrac{\mathbf{C}_{n-1}}{2n} \qquad (\clubsuit)$

Conclusion. D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$, on a : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos^{2n-2}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathbf{C}_n}{2n-1} = \frac{\mathbf{C}_{n-1}}{2n}$

c/ Etablir que :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*, \quad \mathbf{C}_n = (2n-1)\,n\mathbf{D}_{n-1} - 2n^2\mathbf{D}_n$$

Soit n un entier naturel non nul. On a : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x$.

Pour tout réel $x \in [0, \pi/2]$ on pose :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = \cos 2n(x) \end{cases} \qquad \text{d'où :} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = -2n\sin(x)\cos^{2n-1}(x) \end{cases}$$

Selon les théorèmes généraux, les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$. La formule d'intégration par parties permet alors d'écrire :

$$\mathbf{C}_n = \underbrace{\left[x\cos^{2n}(x)\right]_0^{\pi/2}}_{=0} + 2n\int_0^{\pi/2} x\sin(x)\cos^{2n-1}(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\iff \mathbf{C}_n = 2n\int_0^{\pi/2} x\sin(x)\cos^{2n-1}(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\iff \mathbf{C}_n = 2nK_n \text{ en ayant posé : } K_n = \int_0^{\pi/2} x\sin(x)\cos^{2n-1}(x)\,\mathrm{d}x \qquad (\spadesuit)$$

Calculons K_n à l'aide d'une nouvelle IPP. Pour tout réel $x \in [0, \pi/2]$ on pose :

$$\begin{cases} u(x) = \dfrac{x^2}{2} \\ v(x) = \sin(x)\cos^{2n-1}(x) \end{cases}$$

$$\text{d'où :} \quad \begin{cases} u'(x) = x \\ v'(x) = \cos^{2n}(x) - (2n-1)\sin^2(x)\cos^{2n-2}(x) \end{cases}$$

Avant d'appliquer la formule d'IPP, observons que :

$$v'(x) = \cos^{2n}(x) - (2n-1)\sin^2(x)\cos^{2n-2}(x) = \cos^{2n}(x) - (2n-1)\left(1-\cos^2(x)\right)\cos^{2n-2}(x)$$

D'où : $v'(x) = \cos^{2n}(x) - (2n-1)\left(\cos^{2n-2}(x) - \cos^{2n}(x)\right)$

Soit : $v'(x) = 2n\cos^{2n}(x) - (2n-1)\cos^{2n-2}(x)$

Selon les théorèmes généraux, les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$. La formule d'intégration par parties permet alors d'écrire :

$$K_n = \underbrace{\left[\frac{x^2}{2}\sin(x)\cos^{2n-1}(x)\right]_0^{\pi/2}}_{=0} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x^2\left(2n\cos^{2n}(x) - (2n-1)\cos^{2n-2}(x)\right)\,\mathrm{d}x$$

$$\iff K_n = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 2nx^2\cos^{2n}(x) - (2n-1)\,x^2\cos^{2n-2}(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\iff K_n = -\frac{1}{2}\left[2n\int_0^{\pi/2} x^2\cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x - (2n-1)\int_0^{\pi/2} x^2\cos^{2n-2}(x)\,\mathrm{d}x\right]$$

$$\iff K_n = -\frac{1}{2}\left(2n\mathbf{D}_n - (2n-1)\,\mathbf{D}_{n-1}\right) \qquad (\clubsuit)$$

D'après ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$), on a :

$$\mathbf{C}_n = -2n \times \frac{1}{2}\left(2n\mathbf{D}_n - (2n-1)\,\mathbf{D}_{n-1}\right) = -n\left(2n\mathbf{D}_n - (2n-1)\,\mathbf{D}_{n-1}\right)$$

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{C}_n = (2n-1)\,n\mathbf{D}_{n-1} - 2n^2\mathbf{D}_n$

d/ En déduire que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n^2} = 2\left(\frac{\mathbf{D}_{n-1}}{\mathbf{C}_{n-1}} - \frac{\mathbf{D}_n}{\mathbf{C}_n}\right)$$

Soit n un entier naturel non nul. D'après la question précédente on a :

$$\frac{1}{n^2} = 2\left(\frac{\mathbf{D}_{n-1}}{\mathbf{C}_{n-1}} - \frac{\mathbf{D}_n}{\mathbf{C}_n}\right)$$

Donc : $n(2n-1)\mathbf{D}_{n-1} = \mathbf{C}_n + 2n^2\mathbf{D}_n$

Donc : $\mathbf{D}_{n-1} = \dfrac{\mathbf{C}_n}{n(2n-1)} + \dfrac{2n}{2n-1}\mathbf{D}_n$

Donc : $\mathbf{D}_{n-1} = \dfrac{\mathbf{C}_{n-1}}{2n^2} + \dfrac{2n}{2n-1}\mathbf{D}_n$ $\qquad$ (car $\dfrac{\mathbf{C}_n}{2n-1} = \dfrac{\mathbf{C}_{n-1}}{2n}$ d'après la q. 2-b)

Donc : $\dfrac{\mathbf{D}_{n-1}}{\mathbf{C}_{n-1}} = \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{2n}{(2n-1)\,\mathbf{C}_{n-1}}\mathbf{D}_n$ $\qquad$ (division par $\mathbf{C}_{n-1} \neq 0$ d'après la q. 1-c)

Donc : $\dfrac{\mathbf{D}_{n-1}}{\mathbf{C}_{n-1}} = \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{\mathbf{D}_n}{\mathbf{C}_n}$ $\qquad$ (car $\dfrac{2n}{(2n-1)\,\mathbf{C}_{n-1}} = \dfrac{1}{\mathbf{C}_n}$ d'après la q. 2-b)

Donc : $\dfrac{1}{2n^2} = \dfrac{\mathbf{D}_{n-1}}{\mathbf{C}_{n-1}} - \dfrac{\mathbf{D}_n}{\mathbf{C}_n}$

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{n^2} = 2\left(\dfrac{\mathbf{D}_{n-1}}{\mathbf{C}_{n-1}} - \dfrac{\mathbf{D}_n}{\mathbf{C}_n}\right)$

3/ Majoration de $\mathbf{D}_n$.

On admet que : $\forall\, x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \quad x \leqslant \dfrac{\pi}{2}\sin(x)$.

En déduire que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{D}_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}\frac{\mathbf{C}_n}{2n+2}$$

Soit n un entier naturel. On a : $\mathbf{D}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2 \cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x$.

D'après l'énoncé, on a :

$$\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\sin(x)$$

D'où :

$$\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad 0 \leqslant x^2 \leqslant \frac{\pi^2}{4}\sin^2(x)$$

D'où :

$$\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad 0 \leqslant x^2\cos^{2n}(x) \leqslant \frac{\pi^2}{4}\sin^2(x)\cos^{2n}(x)$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que :

$$\mathbf{D}_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x$$

Or :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \left(1-\cos^2(x)\right)\cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x = \mathbf{C}_n - \mathbf{C}_{n+1}$$

Puisque : $\mathbf{C}_n - \mathbf{C}_{n+1} = \dfrac{\mathbf{C}_n}{2n+2}$ d'après les questions 2-a et 2-b, on peut conclure.

$\boxed{\textbf{Conclusion}.\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{D}_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}\frac{\mathbf{C}_n}{2n+2}}$

4/ Calcul de $\zeta(2)$. Pour tout entier naturel N non nul, on pose :

$$\mathbf{S}_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$$

a/ Etablir que :

$$\forall\, N \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{S}_N = \frac{\pi^2}{6} - 2\frac{\mathbf{D}_N}{\mathbf{C}_N}$$

Soit N un entier naturel non nul. Pour tout entier $n \in [\![\, 1, N \,]\!]$ on a :

$$\frac{1}{n^2} = 2\left(\frac{\mathbf{D}_{n-1}}{\mathbf{C}_{n-1}} - \frac{\mathbf{D}_n}{\mathbf{C}_n}\right) \qquad \text{(question 2-d)}$$

On en déduit que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\mathbf{D}_{n-1}}{\mathbf{C}_{n-1}} - \frac{\mathbf{D}_n}{\mathbf{C}_n}\right)$

La somme de droite étant télescopique, on en déduit : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} = 2\left(\frac{\mathbf{D}_0}{\mathbf{C}_0} - \frac{\mathbf{D}_N}{\mathbf{C}_N}\right)$

Or :

$$\mathbf{C}_0 = \int_0^{\pi/2} 1 \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \text{ et } \mathbf{D}_0 = \int_0^{\pi/2} x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{24}$$

Donc : $\dfrac{\mathbf{D}_0}{\mathbf{C}_0} = \dfrac{\pi^3}{24} \times \dfrac{2}{\pi} = \dfrac{\pi^2}{12}$.

On en déduit que :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = 2\left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{\mathbf{D}_N}{\mathbf{C}_N}\right)$$

$$\boxed{\textbf{Conclusion.}\ \forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{S}_N = \frac{\pi^2}{6} - 2\frac{\mathbf{D}_N}{\mathbf{C}_N}}$$

b/ Déduire des questions précédentes la limite de $\mathbf{S}_N$ lorsque N tend vers $+\infty$.

Soit N un entier naturel non nul. D'après la question 3, on a :

$$0 \leqslant \mathbf{D}_N \leqslant \frac{\pi^2}{4} \frac{\mathbf{C}_N}{2N+2}$$

Donc :

$$0 \leqslant \frac{\mathbf{D}_N}{\mathbf{C}_N} \leqslant \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{2N+2}$$

On en déduit (théorème des gendarmes) que : $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \frac{\mathbf{D}_N}{\mathbf{C}_N} = 0$. Ce qui permet de conclure, avec la question précédente que :

$$\boxed{\lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}}$$