MPCSI

CB1 : correction exercice 2

Vendredi 14 janvier

Exercice 1 :

Partie A

1. L'équation homogène associée à (E) est (E_H) : $y'-y=0$, $\boxed{S_H=\{x\mapsto \lambda \mathrm{e}^x, \lambda\in\mathbf{R}\}}$.

2. On cherche une solution particulière de la forme $f(x)=\lambda(x)\mathrm{e}^x$ avec λ une fonction dérivable. On a : f est solution de $(E) \Leftrightarrow f'-f=\dfrac{x^n}{n!} \Leftrightarrow \lambda'(x)\mathrm{e}^x+\lambda(x)\mathrm{e}^x-\lambda(x)\mathrm{e}^x=\dfrac{x^n}{n!} \Leftrightarrow \lambda'(x)=\dfrac{x^n\mathrm{e}^{-x}}{n!}$.

La fonction $x\mapsto \dfrac{x^n\mathrm{e}^{-x}}{n!}$ est continue sur $\mathbf{R}$ donc y admet des primitives, soit $\lambda : x\mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{t^n\mathrm{e}^{-t}}{n!}\mathrm{d}t$ une primitive de $x\mapsto \dfrac{x^n\mathrm{e}^{-x}}{n!}$ sur $\mathbf{R}$.

$$\boxed{y_p : x\mapsto \mathrm{e}^x\int_0^x \frac{t^n\mathrm{e}^{-t}}{n!}\mathrm{d}t \text{ est une solution particulière de } (E).}$$

3. $S=\left\{x\mapsto \lambda\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x\displaystyle\int_0^x \frac{t^n\mathrm{e}^{-t}}{n!}\mathrm{d}t, \lambda\in\mathbf{R}\right\}$

4. R_n est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$ donc est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x\in\mathbf{R}, R_n'(x)=\mathrm{e}^x-\displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{kx^{k-1}}{k!}=\mathrm{e}^x-\sum_{k=1}^n\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}=\mathrm{e}^x-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}$.

$\forall x\in\mathbf{R}, R_n'(x)-R_n(x)=\mathrm{e}^x-\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}-\left(\mathrm{e}^x-\sum_{k=0}^n\frac{x^k}{k!}\right)=\frac{x^n}{n!}$ donc R_n est solution de (E).

5. $R_n(0)=\mathrm{e}^0-\displaystyle\sum_{k=0}^n\frac{0^k}{k!}=1-1=0$. donc R_n est l'unique solution de (E) vérifiant la condition initiale $y(0)=0$.

$R_n(x)$ s'écrit sous la forme $R_n(x)=\lambda\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x\displaystyle\int_0^x\frac{t^n\mathrm{e}^{-t}}{n!}\mathrm{d}t$ avec $\lambda\in\mathbf{R}$

$R_n(0)=0\Leftrightarrow \lambda\mathrm{e}^0+\mathrm{e}^0\displaystyle\int_0^0\frac{t^n\mathrm{e}^{-t}}{n!}\mathrm{d}t=0\Leftrightarrow\lambda=0$

$$\boxed{\forall x\in\mathbf{R}, \mathbf{R}_n(x)=\mathrm{e}^x\int_0^x\frac{t^n\mathrm{e}^{-t}}{n!}\mathrm{d}t}$$

6. $\forall x\in\mathbf{R}_+$, on a $|R_n(x)|=\left|\mathrm{e}^x\displaystyle\int_0^x\frac{t^n\mathrm{e}^{-t}}{n!}\mathrm{d}t\right|=\mathrm{e}^x\int_0^x\frac{t^n\mathrm{e}^{-t}}{n!}\mathrm{d}t$ car les facteurs sont positifs puisque la fonction intégrée est positive et que les bornes sont dans "le bon ordre".

$\forall t\in\mathbf{R}_+, e^{-t}\leqslant 1$ donc $t^ne^{-t}\leqslant t_n$ car $t^n\geqslant 0$, $\forall t\in\mathbf{R}_+,\forall n\in\mathbf{N}$, donc par croissance de l'intégrale $(0\leqslant x)$:
On a :
$\displaystyle\int_0^x\frac{t^n\mathrm{e}^{-t}}{n!}\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x\frac{t^n}{n!}\mathrm{d}t=\left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^x=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

donc $\boxed{\forall x\in\mathbf{R}_+, |R_n(x)|\leqslant\dfrac{x^{n+1}\mathrm{e}^x}{(n+1)!}}$.

7. Soit $x \in \mathbf{R}_+$. On a vu que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{x^{n+1}\mathrm{e}^x}{(n+1)!}$. . Or, $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $R_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Or, $R_n(x) = \mathrm{e}^x - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$, on en déduit donc que

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^x}$$

Partie B

8. On a : $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$ donc $\boxed{(u_n) \text{ est strictement croissante.}}$

On a : $\forall n \in \mathbf{N}^*, v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+1)(n+1)!} - \dfrac{1}{nn!} = \dfrac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} = \dfrac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$ donc $\boxed{(v_n) \text{ est strictement décroissante}}$.

9. On a, $\forall n \in \mathbf{N}^*, v_n - u_n = \dfrac{1}{nn!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On a déjà vu que u est croissante et v décroissante donc $\boxed{u \text{ et } v \text{ sont adjacentes.}}$

10. u et v étant adjacentes, elles convergent vers un même réel ℓ.

La suite u étant strictement croissante, on a : $\forall q \in N^*, u_q < \ell$ et, de façon analogue, $\forall q \in N^*, \ell < v_q$ Finalement, on a bien : $\boxed{\forall q \in N^*, u_q < \ell < v_q.}$

11. Supposons que ℓ soit rationnel, il est alors possible de l'écrire sous la forme d'un quotient $\ell = \dfrac{p}{q}$. En multipliant par $q!$ l'inégalité de la question précédente, il vient $q!u_q < p(q-1)! < q!v_q$. Or, $q!u_q = q!\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} =$ $q! + (q-1)! + \cdots + 1$ est un entier, notons le m. On a : $q!v_q = q!u_q + +\dfrac{1}{q} = m + \dfrac{1}{q}$. On a donc $p(q-1)! \in \left]m; m+\dfrac{1}{q}\right[$ ce qui est absurde car $p(q-1)!$ est entier et qu'il n'y a pas d'entiers dans $\left]m; m+\dfrac{1}{q}\right[$.

$\boxed{\ell \text{ est donc irrationnel.}}$

12. ℓ est la limite de $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1^k}{k!}$. Or, on a vu la partie A que cette suite converge vers $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$. D'après la question précédente,

$\boxed{\mathrm{e} \text{ est irrationnel.}}$