CORRIGÉ DU PBS DE MATHÉMATIQUES N°6 — 25 JANVIER 2023

Dans $M_3(\mathbb{R})$, on considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

► **PARTIE A - Calcul des puissances de A .**

1) Soient $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$. Résolvons le système $PX = B$ par la méthode du pivot de Gauss.

$$[PX = B] \iff \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = b_1 & (L_1) \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = b_2 & (L_2) \\ -x_1 + x_2 + x_3 = b_3 & (L_3) \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = b_1 & (L_1) \\ x_2 + 3x_3 = b_1 + 2b_2 & (L_2) \leftarrow (L_1) + 2(L_2) \\ x_2 + x_3 = b_1 + 2b_3 & (L_3) \leftarrow (L_1) + 2(L_3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = b_1 & (L_1) \\ x_2 + 3x_3 = b_1 + 2b_2 & (L_2) \\ 2x_3 = 2b_2 - 2b_3 & (L_3) \leftarrow (L_2) - (L_3) \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = b_1 & (L_1) \\ x_2 + 3x_3 = b_1 + 2b_2 & (L_2) \\ x_3 = b_2 - b_3 & (L_3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x_1 = 2b_1 + 2b_3 & (L_1) \\ x_2 = b_1 - b_2 + 3b_3 & (L_2) \\ x_3 = b_2 - b_3 & (L_3) \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = b_1 + b_3 & (L_1) \\ x_2 = b_1 - b_2 + 3b_3 & (L_2) \\ x_3 = b_2 - b_3 & (L_3) \end{cases}$$

Conclusion. $P \in GL_3(\mathbb{R})$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2) Après calculs :

$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3) $\forall n \in \mathbb{N}, D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

4) Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété " $A^n = PD^nP^{-1}$ ". L'initialisation (pour $n = 0$) est immédiate puisque $A^0 = I_n$ et $PD^0P^{-1} = PI_nP^{-1} = PP^{-1} = I_n$. Reste à établir l'hérédité.

Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain entier naturel n . Alors $A^{n+1} = A^n \times A$, et en utilisant la définition de D et l'hypothèse de récurrence, on peut écrire : $A^{n+1} = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$. Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, ce qui prouve l'hérédité.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$.

► **PARTIE B - Etude du commutant de A .**

5) Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$. On a : $[P^{-1}MP \in \text{COM}(D)] \iff [P^{-1}MPD = DP^{-1}MP]$

$$\iff [P^{-1}MPP^{-1}AP = P^{-1}APP^{-1}MP] \iff [P^{-1}MAP = P^{-1}AMP] \iff [MA = AM] \iff [M \in \text{COM}(A)]$$

Conclusion : $\forall M \in M_3(\mathbb{R}), [M \in \text{COM}(A)] \iff [P^{-1}MP \in \text{COM}(D)]$.

6) Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$. Il existe 9 réels $a, b, \dots, i$ tels que : $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. La matrice M est dans le commutant de D si et seulement si $MD = DM$.

$$\text{Or : } MD = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & b & 2c \\ -d & e & 2f \\ -g & h & 2i \end{pmatrix}$$

$$\text{Et : } DM = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}$$

$$\text{On déduit de ces calculs que : } [MD = DM] \iff \begin{cases} b = -b \\ 2c = -c \\ d = -d \\ 2f = f \\ 2g = -g \\ 2h = h \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \\ f = 0 \\ g = 0 \\ h = 0 \end{cases}$$

Conclusion : $[M \in \text{COM}(D)] \iff [\exists (a, e, i) \in \mathbb{R}^3, M = \text{diag}(a, e, i)]$. En d'autres termes, le commutant de la matrice D est l'ensemble des matrices diagonales de $M_3(\mathbb{R})$.

7) Soit M une matrice de $M_3(\mathbb{R})$; M est dans le commutant de A si et seulement si $P^{-1}MP$ est dans le commutant de D d'après la question 5. Donc d'après la question précédente :

$$[M \in \text{COM}(A)] \iff [P^{-1}MP \in \text{COM}(D)] \iff [\exists (a, e, i) \in \mathbb{R}^3, P^{-1}MP = \text{diag}(a, e, i)] \\ \iff [\exists (a, e, i) \in \mathbb{R}^3, M = P \text{diag}(a, e, i) P^{-1}]$$

$$\text{Or : } P \text{diag}(a, e, i) P^{-1} = \begin{pmatrix} 2a - e & e - i & 2a - 3e + i \\ e - a & 2i - e & 3e - a - 2i \\ e - a & i - e & 3e - a - i \end{pmatrix}$$

$$\text{Conclusion : } \text{COM}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 2a - e & e - i & 2a - 3e + i \\ e - a & 2i - e & 3e - a - 2i \\ e - a & i - e & 3e - a - i \end{pmatrix} / (a, e, i) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

8) D'après la question précédente : $[M \in \text{COM}(A)] \iff [\exists (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3, M = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \alpha_3 B_3]$ en ayant posé :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

9) D'après l'énoncé : $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$.

10) Posons $\mathcal{P}(n)$: " $X_n = A^n X_0$ ", et montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour entier naturel n .

Initialisation : pour $n = 0$, on a $A^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n . Alors :

$$X_{n+1} = AX_n = A(A^n X_0) = (AA^n) X_0 = A^{n+1} X_0$$

Ce qui assure que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, et établit l'hérédité de la propriété.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$.

11) Soit n un entier naturel. D'après la question précédente, on a : $X_n = A^n X_0$. D'où grâce à la question

4 : $X_n = PD^n P^{-1} X_0$. Or, d'après l'énoncé : $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculons :

$$P^{-1} X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ d'où : } P^{-1} X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où : } D^n P^{-1} X_0 = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ soit : } D^n P^{-1} X_0 = \begin{pmatrix} (-1)^n \\ 0 \\ 2^n \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit enfin : } PD^n P^{-1} X_0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n \\ 0 \\ 2^n \end{pmatrix} \text{ c\`ad : } PD^n P^{-1} X_0 = \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^{n+1} \\ (-1)^{n+1} + 2^n \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}, X_n = \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^{n+1} \\ (-1)^{n+1} + 2^n \end{pmatrix}.$$

$$\text{On en d\`eduit que : } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n = 2(-1)^n - 2^n \\ v_n = (-1)^{n+1} + 2^{n+1} \\ w_n = (-1)^{n+1} + 2^n \end{cases}.$$