Colle 15 – Questions de cours

Question de cours 1. — **Propriété *(de limite séquentielle)*** : soient $(x_n)_n$ une suite réelle de limite $+\infty$, et f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. On suppose que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (avec $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell = +\infty$). Alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$.

Preuve. A noter qu'il y a ici deux preuves à effectuer, suivant que $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell = +\infty$.

➤ <u>Cas n^{0}1 : $\ell \in \mathbb{R}$</u>. On suppose donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (avec ℓ réel). Fixons $\varepsilon > 0$.

Puisque : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, on peut affirmer que : $\exists\, x_0 \in \mathbb{R},\ x > x_0 \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$ ($\spadesuit$).

Comme par ailleurs : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$, on peut affirmer que : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow x_n > x_0$ ($\clubsuit$).

D'après ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$), et puisque ε est un réel strictement positif arbitraire dans ce qui précède, on a établi que :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow |f(x_n) - \ell| < \varepsilon, \text{ c'est-à-dire : } \boxed{\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell}$$

➤ <u>Cas n^{0}2 : $\ell = +\infty$</u>. On suppose donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Fixons $M \in \mathbb{R}$.

Puisque : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, on peut affirmer que : $\exists\, x_0 \in \mathbb{R},\ x > x_0 \Longrightarrow f(x) > M$ ($\spadesuit$).

Comme par ailleurs : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$, on peut affirmer que : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow x_n > x_0$ ($\clubsuit$).

D'après ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$), et puisque M est un réel arbitraire dans ce qui précède, on a établi que :

$$\forall\, M \in \mathbb{R},\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow f(x_n) > M, \text{ c'est-à-dire : } \boxed{\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = +\infty}$$

Question de cours 2. — **Exercice classique - *(théorème du point fixe)*.**

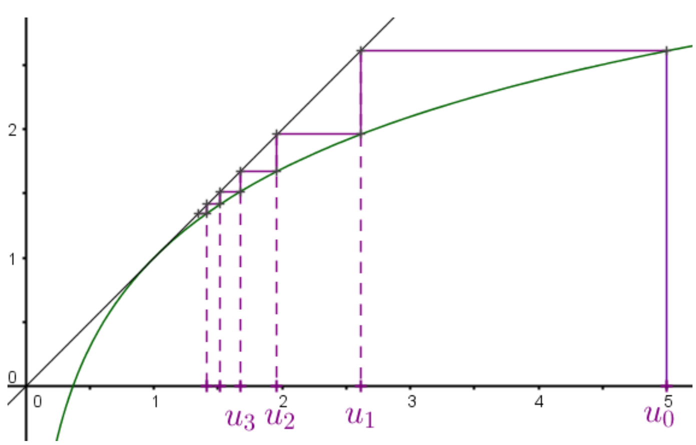
$$\forall\, f \in \mathscr{C}^0([a,b],[a,b]),\ \exists\, c \in [a,b],\ f(c) = c.$$

Par hypothèse, la fonction $g : x \longmapsto f(x) - x$ est continue sur $[a,b]$.

Par ailleurs : $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$, puisque par hypothèse encore, on a $f(a) \in [a,b]$, d'où en particulier $f(a) \geqslant a$. De manière analogue : $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$.

La fonction g étant continue sur $[a,b]$, et telle que $g(a)g(b) \leqslant 0$, le TVI permet d'affirmer qu'il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = 0$, c'est à dire tel que $f(c) = c$, ce qu'il fallait démontrer.

Question de cours 3. — **Exercice**. Etudier la suite u définie par : $u_0 \geqslant 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$



➤ On peut commencer par observer que la suite u est **bien définie**, puisque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 1$ (par une récurrence immédiate).

➤ On peut également noter que la fonction $x \longmapsto 1 + \ln(x)$ est croissante sur $[1, +\infty[$. La suite u est donc **monotone**.

➤ Enfin, il est bien connu[*] que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) \leqslant x - 1$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 1 + \ln(x) \leqslant x$, d'où en particulier : $1 + \ln(u_0) \leqslant u_0$, c'est-à-dire que $u_1 \leqslant u_0$. On en déduit que u est **décroissante**.

---

*. C'est un résultat de référence, traduisant le fait que la courbe représentative de la fonction ln est située en-dessous de sa tangente au point d'abscisse 1, qui a précisément pour équation $y = x - 1$.

➤ Puisque u est décroissante et minorée (par 1), elle converge (théorème de la limite monotone). Reste à résoudre l'équation $f(x) = x$, qui n'a qu'une seule solution ($x = 1$) puisque la courbe représentative de la fonction ln et sa tangente au point d'abscisse 1 ont un unique point d'intersection.

Conclusion : u converge vers 1.

QUESTION DE COURS 4. — **Propriété** : soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, et soit a un réel de I. Si f est continue en a et si $f(a) > 0$, alors f est strictement positive au voisinage de a.

Sous les hypothèses de l'énoncé, la fonction f est continue en a, et on a donc : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

On peut alors rendre la quantité $|f(x) - f(a)|$ (càd la distance entre $f(x)$ et $f(a)$) aussi petite que l'on veut, sous réserve que l'on choisisse x assez proche de a. Plus sérieusement et avec des quantificateurs :

$$\exists\, \alpha > 0,\ (|x - a| < \alpha) \Longrightarrow \left(|f(x) - f(a)| < \frac{f(a)}{2}\right)$$

En particulier : $\exists\, \alpha > 0,\ (|x - a| < \alpha) \Longrightarrow \left(f(x) > \dfrac{f(a)}{2} > 0\right)$

On en déduit que sur l'intervalle $]\, a - \alpha ; a + \alpha\, [$, la fonction f prend des valeurs strictement supérieures à $f(a)$, et par suite strictement positives.

En d'autres termes, au voisinage de a, la fonction f est strictement positive, cqfd.

QUESTION DE COURS 5. — **Propriété**. Soit u une suite réelle telle que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f\left(u_n\right)$. Si f est croissante, alors u est monotone. Si f est décroissante, alors les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de monotonies opposées.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs réelles, telle que $f(I) \subset I$.

➤ **Si f est croissante**. On distingue deux cas : $u_0 \leqslant u_1$ et $u_0 > u_1$.

Une récurrence immédiate[†] permet d'établir que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} \leqslant u_n$ dans le premier cas, et $u_{n+1} \geqslant u_n$ dans le second. En tous les cas, la suite u est monotone, ce qui prouve la première implication.

➤ **Si f est décroissante**. Alors $f \circ f$ est croissante. On en déduit que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.

Si $u_0 \geqslant u_2$, alors la suite (u_{2n}) est croissante. On a par ailleurs : $f(u_0) = u_1 \leqslant f(u_2) = u_3$ puisque f est décroissante. On en déduit que la suite (u_{2n+1}) est décroissante. Ainsi les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de monotonies opposées.

L'autre cas, où $u_0 \leqslant u_2$, se déduit trivialement du raisonnement précédent.

†. Détaillée dans le cours.

Question de cours 6. — **Théorème (des bornes atteintes)** : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Soit f une fonction continue sur le segment $[a;b]$ (avec a et b réels, $a<b$).

On pose $M = \sup\{f(x) \,/\, x \in [a,b]\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

D'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure : $\exists\, (x_n) \in [a,b]^{\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = M$.

La suite (x_n) étant bornée[‡], le théorème de Bolzano-Weierstrass permet d'affirmer que l'on peut en extraire une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ convergente. Notons : $c = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)}$.

Puisque la suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ est une suite d'éléments de $[a,b]$, on a : $c \in [a,b]$ (par stabilité des inégalités larges par passage à la limite).

Il est alors légitime d'appliquer la propriété de continuité séquentielle à la fonction f, qui est continue en c car elle est en particulier continue sur $[a,b]$, pour obtenir : $f(c) = \lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x_{\varphi(n)}\right)$ (♠).

Il reste à observer que la suite de terme général $f\left(x_{\varphi(n)}\right)$ est extraite de la suite de terme général $f(x_n)$ pour affimer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x_{\varphi(n)}\right) = M$ (♣).

Par unicité de la limite, on déduit de (♠) et de (♣) que : $M = f(c)$. Ainsi la fonction f admet un maximum sur $[a,b]$, égal à $f(c)$.

On établit de façon analogue que f admet un minimum sur $[a,b]$ (prendre l'image de la démonstration précédente par la symétrie par rapport à zéro).

Question de cours 7. — **Théorème *(image continue d'un intervalle)*.**

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Explicitement, si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle.

Remarque préliminaire. Le point-clef pour cette preuve est la définition de ce qu'est un intervalle de $\mathbb{R}$: explicitement, c'est une partie $I \subset \mathbb{R}$ "sans trous", dans le sens plus précis suivant : $\forall\,(x,x') \in I^2,\ [x,x'] \subset I$.

Cette définition posée, passons à la preuve. Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

Soient y et y' deux éléments de $f(I)$. SNALG, on peut supposer $y \leqslant y'$. En outre, par définition de $f(I)$, il existe deux réels x et x' tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$.

Considérons à présent un réel Y compris entre y et y'. Alors Y est une valeur intermédiaire de la fonction f (sur $[x,x']$ ou sur $[x',x]$) et il existe donc (d'après le TVI) un réel c compris entre x et x' tel que $f(c) = Y$.

Puisque c est compris entre x et x' (qui sont deux éléments de I) et que I est un intervalle, on peut affirmer que $c \in I$. Ce fait, combiné avec l'égalité $Y = f(c)$ permet d'affirmer que : $Y \in f(I)$.

En résumé, on a établi : $\forall\,(y,y') \in (f(I))^2,\ y \leqslant y',\ [y,y'] \subset f(I)$.

Cette assertion signifie exactement que $f(I)$ est un intervalle, ce qui prouve le théorème.

Question de cours 8. — **Théorème des valeurs intermédiaires** : soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et à valeurs réelles. On suppose que $f(a)\,f(b) \leqslant 0$. Alors : $\exists\, c \in [a,b]\,,\ f(c) = 0$.

Preuve. Voir preuve faite en cours, et illustration sur l'algorithme de dichotomie.

‡. C'est une suite de réels de $[a,b]$.

Question de cours 9. — **Théorème *(de la limite monotone)*** : soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Si f est croissante et majorée (ou décroissante et minorée) alors : $\exists\, l \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

Preuve. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$,[§] croissante et majorée : $\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$.

Notons $E = \{f(x) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des valeurs de la fonction f. Cet ensemble est une partie non vide (par définition) et majorée (par hypothèse) de $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que E admet une borne supérieure, d'après la propriété du même nom. Notons : $S = \sup E$, et considérons un réel $\varepsilon > 0$.

D'après la propriété caractérisant la borne supérieure, il existe un réel x_0 tel que : $S - \varepsilon < f(x_0) \leqslant S$.

Or, f étant croissante (par hypothèse) et majorée par S, on en déduit que :

$$\forall\, x \geqslant x_0,\ S - \varepsilon < f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant S, \text{ d'où : } \forall\, x \geqslant x_0,\ S - \varepsilon < f(x) \leqslant S \text{ ce qui implique : } \forall\, x \geqslant x_0,\ |f(x) - S| < \varepsilon$$

En résumé, on a prouvé que : $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, x_0 \in \mathbb{R},\ (x \geqslant x_0 \Longrightarrow |f(x) - S| < \varepsilon)$. Donc la fonction f a pour limite S en $+\infty$.

Conclusion. Si f est croissante et majorée, alors f admet une limite finie en $+\infty$.

Dans l'autre situation (celle où f est décroissante et minorée), il suffit d'observer que la fonction $(-f)$ est croissante et majorée pour se ramener au cas précédent, et conclure en observant que $(-f)$ admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si il en va de même pour f.

---

§. Il suffit en fait de supposer que f est définie au voisinage de $+\infty$.