MPSI – Colle 15 (30 janvier au 3 février 2023) : Limites & Continuité

Chapitre 14 : Limites & Continuité

1 – Limites d'une fonction à valeurs réelles

Définition de voisinage (ouvert) de a avec $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Pour f une fonction à valeurs réelles définie au voisinage de a, définitions de $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ avec a et $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Notions de limite à droite et de limite à gauche de $a \in \mathbb{R}$ pour f.

Propriétés des limites : les propriétés démontrées dans le chapitre sur les suites s'étendent pour la plupart aux limites de fonctions. C'est notamment le cas des propriétés algébriques (limite d'une somme, d'un produit...), des théorèmes de comparaison, d'encadrement, de la limite monotone.... Propriété de limite séquentielle.

2 – Continuité d'une fonction à valeurs réelles

Définition de continuité en a pour une fonction f définie au voisinage de a. Définition de continuité sur un intervalle I. Notation $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$. Définition de prolongement par continuité.

3 – Propriétés des fonctions (à valeurs réelles) continues

Propriétés générales : $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$ est stable par "cocktail"...

Propriété de continuité séquentielle.

Théorème des valeurs intermédiaires.

Conséquences du TVI : théorème de la bijection, théorème du point fixe, image d'un intervalle par une fonction continue.

Théorème des bornes atteintes, formule de la moyenne.

4 – Extension aux fonctions à valeurs complexes

Pour $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, définition de f continue en $a \in I$.

Théorème ("pont $\mathbb{R} \longleftrightarrow \mathbb{C}$") : f est continue en a ssi $\mathrm{Re} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont continues en a.

Exemple-clef : la fonction $t \longmapsto e^{\mathrm{i}\,t}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (et à valeurs dans $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}$.

5 – Suites "du type $u_{n+1} = f(u_n)$"

Généralités : notion d'intervalle stable, impact de la monotonie de f.

Conséquence de la continuité séquentielle : soit (u_n) une suite "du type $u_{n+1} = f(u_n)$" ; si (u_n) converge vers ℓ, et $f$continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$

Questions de cours

- **Propriété** ***(de limite séquentielle)*** : soient $(x_n)_n$ une suite réelle de limite $+\infty$, et f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. On suppose que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (avec $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell = +\infty$). Alors : $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$.

- **Propriété** : soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, et soit a un réel de I. Si f est continue en a et si $f(a) > 0$, alors f est strictement positive au voisinage de a.

- **Exercice classique -** ***(théorème du point fixe)***

- **Propriété**. Pour une suite "du type $u_{n+1} = f(u_n)$", on a : f croissante $\Longrightarrow (u_n)_n$ monotone. Et f décroissante $\Longrightarrow (u_{2n})$ et

Exercice. Etudier la suite u définie par : $u_0 \geqslant 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$

Sur le principe du volontariat

- **Théorème des valeurs intermédiaires**.

- **Théorème (image continue d'un intervalle)** : "l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle".

- **Théorème (de la limite monotone)** : soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Si f est croissante et majorée (ou décroissante et minorée) alors : $\exists\, l \in \mathbb{R},\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

- **Théorème (des bornes atteintes)** : toute fonction continue