# Exercices 15 — Ensembles finis, groupe symétrique — Corrigés

## Dénombrement

**Exercice 1.** — Un jeu de cartes "standard" est constitué de 52 cartes, réparties en quatre couleurs (Pique, Coeur, Carreau, Trèfle).
Dans chaque couleur, on trouve donc 13 cartes dont les "valeurs" sont : 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 10 – Valet – Dame – Roi – As.

Une **main** est une combinaison de 5 cartes d'un tel jeu.

1) Combien existe t-il de mains différentes ?

Une main est une combinaison de 5 cartes parmi les 52 du jeu.

**Conclusion.** Il existe $\binom{52}{5}$ mains différentes.

2) Quelle est la probabilité d'avoir une *couleur* (5 cartes de la même couleur) ?

On compte le nombre de mains donnant une "couleur". Il en existe : $\binom{4}{1} \times \binom{13}{5}$ ($\binom{4}{1}$ pour le choix d'une couleur ; et $\binom{13}{5}$ pour le choix des 5 cartes dans une couleur donnée).

**Conclusion.** La probabilité d'avoir une *couleur* est : $p_1 = \dfrac{\binom{4}{1} \times \binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}$

Pour info : $p_1 = \dfrac{33}{16660}$, de l'ordre de 2 pour 1000.

3) Quelle est la probabilité d'avoir un *carré* (une main contenant 4 cartes de la même valeur) ?

On compte le nombre de mains donnant un "carré". Il en existe : $\binom{13}{1} \times \binom{48}{1}$ ($\binom{13}{1}$ pour le choix d'une hauteur ; et $\binom{48}{1}$ pour le choix de la dernière carte).

**Conclusion.** La probabilité d'avoir un *carré* est : $p_2 = \dfrac{\binom{13}{1} \times \binom{48}{1}}{\binom{52}{5}}$

Pour info : $p_2 = \dfrac{1}{4165}$, de l'ordre de... 1 sur 4000.

4) Quelle est la probabilité d'avoir une *quinte flush* (5 cartes de la même couleur, et de valeurs consécutives) ?

On compte le nombre de mains donnant une "quinte flush". Il en existe : $\binom{4}{1} \times \binom{10}{1}$ ($\binom{4}{1}$ pour le choix d'une couleur ; et $\binom{10}{1}$ pour le choix de la plus basse carte).

**Conclusion.** La probabilité d'avoir une *quinte flush* est : $p_3 = \dfrac{\binom{4}{1} \times \binom{10}{1}}{\binom{52}{5}}$

Pour info : $p_3 = \dfrac{1}{64974}$, de l'ordre de 1 sur 100 000 ("à la Physicienne").

5) Quelle est la probabilité d'avoir un *brelan* (une main contenant 3 cartes de la même valeur) ?

Uniquement pour les joueurs avertis... On compte le nombre de mains contenant 3 cartes de la même hauteur, et on retire celles donnant un carré ou un full. Le nombre de mains donnant un brelan est donc :

$$N = \binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{49}{2} - \binom{13}{1}\binom{48}{1} - \binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{1}\binom{4}{2}$$

**Conclusion.** La probabilité d'avoir un *brelan* est : $p_4 = \dfrac{N}{\binom{52}{5}}$.

Pour info : $p_4 = \dfrac{13}{595}$, de l'ordre de 2 pour 100.

**Exercice 2.** — Soient $E$ et $F$ deux ensembles, et soient $A$ et $B$ deux parties de $E$ et $F$ respectivement. Etant donnée une application $f : E \longrightarrow F$, est-il vrai que :

1) si $A$ est une partie finie de $E$ alors $f(A)$ est une partie finie de $F$ ?

Affirmation vraie, d'après le cours. On a en outre : $\text{card}(f(A)) \leqslant \text{card}(A)$.

2) si $f(A)$ est une partie finie de $F$, alors $A$ est une partie finie de $E$ ?

Affirmation fausse. Posons : $A = \{n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$. La partie $A$ est infinie, alors que $\sin(A) = \{0\}$ est finie.

3) si $B$ est une partie finie de $F$ alors $f^{-1}(B)$ est une partie finie de $E$ ?

Affirmation fausse. Posons : $B = \{0\}$. La partie $B$ est finie, alors que $\sin^{-1}(B) = \{n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$ est infinie.

4) si $f^{-1}(B)$ est une partie finie de $E$ alors $B$ est une partie finie de $F$ ?

Affirmation fausse. Notons $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction carrée, et posons : $B = \mathbb{R}_-$. On a : $f^{-1}(B) = \{0\}$. La partie $f^{-1}(B)$ est finie, alors que $B$ est infinie.

**Exercice 3.** — Quel est le coefficient de $a^3b^5c^2$ dans le développement de $(a+b+c)^{10}$ ?

On compte le nombre de positions pour les $a$, puis pour les $b$, OU pour les $a$, puis pour les $c$, OU pour les $b$, puis pour les $c$, OU pour les $b$, puis pour les $a$, OU pour les $c$, puis pour les $a$, OU pour les $c$, puis pour les $b$ parmi les 10 parenthèses du développement. On obtient alors l'un des 6 résultats suivants (qui sont tous égaux) :

$$\binom{10}{3}\times\binom{7}{5} = \binom{10}{3}\times\binom{7}{2} = \binom{10}{5}\times\binom{5}{2} = \binom{10}{5}\times\binom{5}{3} = \binom{10}{2}\times\binom{8}{3} = \binom{10}{2}\times\binom{8}{5}$$

Quelquesoit le moyen choisi, on obtient : 2 520.

**Exercice 4.** — Soient $E$ un ensemble fini de cardinal $n$, et $A$ une partie de $E$ de cardinal $p$. Combien existe t-il de parties de $E$ contenant $A$ ?

Autant que de partie de $E \backslash A$, càd : $2^{n-p}$.

**Exercice 5.** — Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n$. Calculer : $S = \displaystyle\sum_{X \subset E} \text{Card}(X)$

On a : $S = \displaystyle\sum_{X \subset E} \text{Card}(X) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$

**Exercice 6.** — Soient $n$ et $p$ deux entiers naturels, avec $n \leqslant p$. Combien existe t-il d'applications strictement croissantes de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_p$ ?

Une application strictement croissante de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_p$ est uniquement déterminée par l'ensemble $\{y_1, \ldots, y_n\}$ de ses images.

Il existe donc $\displaystyle\binom{p}{n}$ applications strictement croissantes de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_p$ ?

**Exercice 7.** — On trace dans le plan $n$ droites *en position générale* (c'est à dire deux à deux non parallèles, et trois à trois non concourantes). Combien forme t-on ainsi de triangles ?

Un triangle est uniquement déterminé par les 3 droites qui le définissent.

Il existe donc $\displaystyle\binom{n}{3}$ triangles dans la configuration de l'énoncé.

## Groupe symétrique

**Exercice 8.** — Dans cet exercice, on se place dans $S_6$.

1) Quel est l'inverse du 4-cycle $(1354)$ ?

   D'après le cours : $(1354)^{-1} = (4531) = (1453) = \ldots$.

2) Vérifier que $\sigma = (14)(43)$ est un 3-cycle. En est-il de même pour $\rho = (43)(14)$ ?

   On a : $\sigma = (14)(43) = (143)$. Donc $\sigma$ est un 3-cycle. De même : $\rho = (43)(14) = (134)$ est un 3-cycle.

**Exercice 9.** — Dans cet exercice, on se place dans $S_7$. On considère la permutation :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 1 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

1/ Ecrire $\sigma$ comme un produit de cycles disjoints. En déduire la signature de $\sigma$.

   On a : $\sigma = (1254)(376)$. Il s'ensuit que : $\varepsilon(\sigma) = -1$

2/ Déterminer le plus petit entier naturel $N$ non nul tel que $\sigma^N = \text{id}_{\mathbb{N}_7}$

   $N = 12$.

**Exercice 10.** — **A propos de $S_3$.**

1) Décrire les éléments de $S_3$.

D'après le cours : $S_3 = \{\mathrm{id}, (12), (13), (23), (123), (132)\}$

2) On note $\rho$ le 3-cycle $(132)$. On sait que $G(\rho) = \left\{\rho^k \ / \ k \in \mathbb{N}\right\}$ est un sous-groupe de $S_3$. Décrire $G(\rho)$.

$$G(\rho) = \left\{\underbrace{\mathrm{id}}_{=\rho^0}, \underbrace{(132)}_{=\rho^1}, \underbrace{(123)}_{=\rho^2}\right\}.$$

3) On note 1, 2 et 3 les sommets d'un triangle équilatéral. Comment les éléments de $S_3$ agissent-ils sur les sommets de ce triangle ?

Les trois transpositions correspondent aux trois symétries axiales par rapport aux bissectrices du triangle. Les 2 trois cycles correspondent à deux rotations de centre le centre de gravité du triangle, et ayant pour angles $2\pi/3$ et $4\pi/3$.

**Exercice 11.** — **Supports**. Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2.
Soit $\sigma \in S_n$. On appelle **support** de $\sigma$ l'ensemble : $\mathrm{supp}\,(\sigma) = \{i \in \mathbb{N}_n, \ \sigma(i) \neq i\}$.

1) Que vaut $\mathrm{supp}\,(\sigma)$ pour $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ ?

On a : $\sigma = (2365)$. D'où : $\mathrm{supp}(\sigma) = \{2, 3, 5, 6\}$.

2) Soit $\sigma \in S_n$. Montrer que si $i \in \mathrm{supp}\,(\sigma)$, alors $\sigma(i) \in \mathrm{supp}\,(\sigma)$.

Cf cours.

3) Montrer que deux permutations $\sigma$ et $\tau$ à supports disjoints commutent.

Cf cours.

**Exercice 12.** — Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2.

1/ Soient $i$ et $j$ deux entiers distincts dans $[\![ 2, n ]\!]$. Calculer : $\rho = (1i)(1j)(1i)$.

$(1i)(1j)(1i) = (ij)$

2/ Montrer que les transpositions de la forme $(1i)$ avec $i \in [\![ 2, n ]\!]$ engendrent $S_n$.

Selon le cours, les transpositions engendrent $S_n$. Or d'après la question précédente, toute transposition est produit de transposition de la forme $(1\bullet)$. La conclusion s'ensuit.

**Exercice 13.** — **Classes de conjugaison dans $S_n$.** Dans cet exercice, $n$ désigne encore un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Soient $\sigma$ et $\sigma'$ deux permutations de $S_n$. On dit que $\sigma'$ est **conjuguée** à $\sigma$ s'il existe une permutation $\tau \in S_n$ telle que : $\boxed{\sigma' = \tau^{-1}\sigma\tau}$.

1/ Montrer que la relation de conjugaison (définie ci-dessus) est une relation d'équivalence sur $S_n$.
*Par la suite, on pourra donc dire que $\sigma$ et $\sigma'$ sont conjuguées lorsque $\sigma'$ est conjuguée à $\sigma$ ou $\sigma$ est conjuguée à $\sigma'$ ; on pourra le noter $\sigma' \sim \sigma$.*

Pour tout $\sigma \in S_n$, on a : $\sigma = \mathrm{id}^{-1}\sigma\mathrm{id}$. Donc $\sigma$ est conjuguée à elle-même. Ce qui prouve la réflexivité de la relation $\sim$.

Soient $\sigma$ et $\sigma'$ dans $S_n$ telles que : $\sigma' = \tau^{-1}\sigma\tau$. Alors : $\sigma = \rho^{-1}\sigma'\rho$ en ayant posé : $\rho = \tau^{-1}$. Ce qui prouve la symétrie de la relation $\sim$.

Soient $\sigma$, $\sigma'$ et $\sigma''$ dans $S_n$ telles que : $\sigma' = \tau^{-1}\sigma\tau$ et $\sigma'' = \rho^{-1}\sigma'\rho$.

Alors : $\sigma'' = \rho^{-1}\tau^{-1}\sigma\tau\rho$. D'où : $\sigma'' = \varphi^{-1}\sigma\varphi$ en ayant posé : $\varphi = \tau\rho$. Ce qui prouve la transitivité de la relation $\sim$.

**Conclusion.** La relation $\sim$ de conjugaison sur les permutations est une réflexion binaire réflexive, symétrique et transitive : c'est donc une relation d'équivalence sur $S_n$.

2/ Quelles sont les permutations conjuguées à l'identité ?

L'identité n'est conjuguée qu'à elle-même.

3/ Soit $\sigma$ une permutation de $S_n$, et soit $m \in [\![ 2, n ]\!]$. Montrer que :

$$\sigma\,(12\cdots m)\,\sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(m))$$

4/ En déduire que deux cycles sont conjugués si et seulement si leurs longueurs sont égales.