

COLLE 16 — EXOS STANDARDS

EXERCICE 1. — Quel est le coefficient de $a^3b^5c^2$ dans le développement de $(a+b+c)^{10}$?

EXERCICE 2. — Dans cet exercice, on se place dans S_8 . On considère la permutation :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 8 & 1 & 4 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

- 1) Ecrire σ comme un produit de cycles disjoints.
- 2) En déduire le support de σ , la signature de σ , et σ^{-1} .
- 3) Existe-t-il un élément ρ de S_8 tel que :

$$\rho\sigma\rho^{-1} = (1234)(5678) ?$$

EXERCICE 3. — Soient E un ensemble fini de cardinal n , et A une partie de E de cardinal p . Combien existe-t-il de parties de E contenant A ?

EXERCICE 4. — Soient E un ensemble fini de cardinal n . Combien existe-t-il de couples (A, B) de parties de E tels que $A \cup B = E$?

EXERCICE 5. — Soient E et F deux ensembles, et soient A et B deux parties de E et F respectivement. Etant donnée une application $f : E \rightarrow F$, est-il vrai que :

- 1) si A est une partie finie de E alors $f(A)$ est une partie finie de F ?
- 2) si $f(A)$ est une partie finie de F , alors A est une partie finie de E ?
- 3) si B est une partie finie de F alors $f^{-1}(B)$ est une partie finie de E ?
- 4) si $f^{-1}(B)$ est une partie finie de E alors B est une partie finie de F ?

EXERCICE 6. — **Questions de dénombrement, comme dans le programme de colle**

- Dans S_6 , combien existe-t-il de transpositions ?
- Dans S_7 , combien existe-t-il de 3-cycles ?
- Dans S_8 , combien existe-t-il de produits de deux 4-cycles à supports disjoints ?
- ...

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

EXERCICE 1. — Quel est le coefficient de $a^3b^5c^2$ dans le développement de $(a + b + c)^{10}$?

$$\binom{10}{3} \binom{7}{5} = \binom{10}{5} \binom{5}{3} = \binom{10}{2} \binom{8}{3} = \dots$$

EXERCICE 2. — Dans cet exercice, on se place dans S_8 . On considère la permutation :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 8 & 1 & 4 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

1) Ecrire σ comme un produit de cycles disjoints.

$$\sigma = (1254)(386)$$

2) En déduire le support de σ , la signature de σ , et σ^{-1} .

$$\text{supp}(\sigma) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}; \varepsilon(\sigma) = (-1)^{4-1} \times (-1)^{3-1} = -1$$

$$\text{Enfin : } \sigma^{-1} = (386)^{-1}(1254)^{-1} = (683)(4521) = (368)(1452)$$

3) Existe-t-il un élément ρ de S_8 tel que :

$$\rho\sigma\rho^{-1} = (1234)(5678) ?$$

Non car la signature de $\rho\sigma\rho^{-1}$ est égale à celle de σ (qui vaut -1), tandis que celle de $(1234)(5678)$ vaut 1 .

EXERCICE 3. — Soient E un ensemble fini de cardinal n , et A une partie de E de cardinal p . Combien existe-t-il de parties de E contenant A ?

Autant que de parties de $E \setminus A$: 2^{n-p}

EXERCICE 4. — Soient E un ensemble fini de cardinal n . Combien existe-t-il de couples (A, B) de parties de E tels que $A \cup B = E$?

Exo précédent + binôme de Newton : 3^n .

EXERCICE 5. — Soient E et F deux ensembles, et soient A et B deux parties de E et F respectivement. Etant donnée une application $f : E \rightarrow F$, est-il vrai que :

1) si A est une partie finie de E alors $f(A)$ est une partie finie de F ?

Oui.

2) si $f(A)$ est une partie finie de F , alors A est une partie finie de E ?

Non.

3) si B est une partie finie de F alors $f^{-1}(B)$ est une partie finie de E ?

Non.

4) si $f^{-1}(B)$ est une partie finie de E alors B est une partie finie de F ?

Non.