

Chapitre 16 : Ensembles finis, groupes symétriques

1 – Ensembles finis

Notation. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{N}_n = [1, n]$. Convention : $\mathbb{N}_0 = \emptyset$.

Définition. Un ensemble E est **fini** s'il existe un entier naturel n tel que E et \mathbb{N}_n soient équipotents.

Lemme (fondamental). Soient n et m deux entiers naturels.

- 1) S'il existe une injection de \mathbb{N}_n dans \mathbb{N}_m , alors $n \leq m$.
- 2) S'il existe une surjection de \mathbb{N}_n dans \mathbb{N}_m , alors $n \geq m$.
- 3) S'il existe une bijection de \mathbb{N}_n dans \mathbb{N}_m , alors $n = m$.

Définition. Soit E un ensemble fini. On appelle **cardinal de E** l'unique entier naturel n tel que E et \mathbb{N}_n sont équipotents.

Notation. On note $\text{card}(E)$ ou $\#E$ le cardinal de E .

Lemme. Soient E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, et $a \in E$. Alors $E \setminus \{a\}$ est un ensemble fini de cardinal $n - 1$.

Propriété. Soient E un ensemble fini, et $A \in \mathcal{P}(E)$. Alors A est un ensemble fini, et $\text{card}(A) \leq \text{card}(E)$ (avec égalité SSI $A = E$).

2 – Opérations sur les ensembles finis

Propriété. Soient A et B deux parties disjointes d'un même ensemble fini E . Alors $A \cup B$ est fini, et $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$

Corollaire. Soit A une partie d'un ensemble fini E . L'ensemble $E \setminus A$ est fini, et : $\text{card}(E \setminus A) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$

Corollaire. Soient A et B deux parties d'un même ensemble E . Alors $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$

Propriété. Soient E et F deux ensembles finis, et $f : E \rightarrow F$ une application. Alors $f(E)$ est un ensemble fini, et $\text{card}(f(E)) \leq \min(\text{card}(E), \text{card}(F))$. En outre, f est injective SSI $\text{card}(f(E)) = \text{card}(E)$.

Propriété. Soient E et F deux ensembles finis, et $f : E \rightarrow F$ une application. On suppose **card** $(E) = \text{card}(F)$. LASSE :

- 1) f est bijective
- 2) f est injective
- 3) f est surjective

3 – Injections et permutations

Lemme. Soient E et F deux ensembles finis, de cardinaux respectifs p et n . Le nombre d'injections de E dans F est : $\frac{n!}{(n-p)!}$ si $p \in [0, n]$, et 0 si $p > n$.

Définition de permutation d'un ensemble. On note S_E l'ensemble des permutations d'un ensemble E .

Théorème. Si E est fini de cardinal n , alors (S_E, \circ) est un groupe fini de cardinal $n!$

4 – Groupe symétrique

Notation : S_n est l'ensemble des permutations de \mathbb{N}_n . S_n est un groupe, de cardinal $n!$

Convention. On note **multiplicativement** la loi de S_n . Explicitement, si σ et τ désignent deux permutations, on parlera du produit $\sigma\tau$ pour désigner la composée $\sigma \circ \tau$.

5 – Transpositions et p -cycles

Définition de transposition. Une transposition est une involution, donc une permutation. Si i, j et k sont trois entiers distincts dans \mathbb{N}_n (avec $n \geq 3$), alors : $(ij)(jk) \neq (jk)(ij)$. Corollaire : S_n est non abélien dès que $n \geq 3$.

Définition de p -cycle. Un p -cycle est une permutation, et : $(a_1 a_2 \cdots a_p)^{-1} = (a_p a_{p-1} \cdots a_1)$.

Propriété. $(a_1 a_2 \cdots a_p) = \prod_{i=1}^{p-1} (a_i a_{i+1})$

Théorème. Les transpositions engendrent le groupe symétrique.

Lemme. Deux permutations à supports disjoints commutent.

Théorème. Toute permutation peut s'écrire comme produit de cycles à supports disjoints.

6 – Signature et groupe alterné

Définition d'inversion. Notation : $I(\sigma)$ est le nombre de couples (i, j) avec $i < j$ sur lesquels σ réalise une inversion. Définition : pour $\sigma \in S_n$, on définit la **signature de σ** comme le réel $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$.

Conséquence : la signature de σ vaut 1 ou (-1) .

L'application ε est donc définie sur S_n , et à valeurs dans $\mathbb{U}_2 = \{\pm 1\}$.

Théorème. $\forall (\sigma, \tau) \in S_n^2, \varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$

Reformulation. $\varepsilon : (S_n, \circ) \longrightarrow (\mathbb{U}_2, \times)$ est un morphisme de groupes.

Propriétés. La signature d'une transposition vaut -1 , celle d'un p -cycle vaut $(-1)^{p-1}$. Et : $\forall \sigma \in S_n$, on a : $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$.

QUESTIONS DE COURS

ATTENTION : CETTE SEMAINE LA QUESTION DE COURS SERA CONSTITUÉE... D'UNE QUESTION DE COURS (SUR LE PRINCIPE DU VOLONTARIAT OU NON) ET D'UNE QUESTION RAPIDE CHOISIE PARMİ CELLES INDIQUÉES PLUS BAS.

- **Propriété.** Soit E un ensemble fini de cardinal n . Alors : $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.
- **Propriété.** Soient A et B deux parties d'un même ensemble fini E . Alors $\text{card}(E \setminus A) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$, et $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$
- **Propriété.** Soient E et F deux ensembles finis, et $f : E \longrightarrow F$ une application. On suppose **card(E) = card(F)**. LASSE :
1) f est bijective 1) f est injective 2) f est surjective
- **Théorème.** Si E est fini de cardinal n , alors (S_E, \circ) est un groupe fini de cardinal $n!$

LES 3 QUESTIONS SUIVANTES SONT SUR LE PRINCIPE DU VOLONTARIAT

- **Lemme "fondamental"** : s'il existe une application injective de \mathbb{N}_n dans \mathbb{N}_m , alors $n \leq m$.
- **Propriété.** Soient E un ensemble fini, et $A \in \mathcal{P}(E)$. Alors A est un ensemble fini, et $\text{card}(A) \leq \text{card}(E)$ (avec égalité SSI $A = E$).
- **Théorème.** Les transpositions engendrent le groupe symétrique.

QUESTIONS RAPIDES

- Soient n et p deux entiers naturels, avec $p \leq n$. Combien existe-t-il d'applications $f : \mathbb{N}_p \longrightarrow \mathbb{N}_n$ strictement croissantes ?
- Dans le plan, on trace n droites (avec n entier ≥ 3) en position générale (deux à deux non-parallèles, trois à trois non-concourantes). Combien de triangles forme-t-on ainsi ?

- Dans S_5 , combien existe-t-il de transpositions ?
- Dans S_5 , combien existe-t-il de 3-cycles ?
- Dans S_5 , combien existe-t-il de produits de 2 transpositions à supports disjoints ?