Exercices 16 — Applications de la dérivation — Corrigé

Révisions

Exercice 1. — Sur quelles parties de $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes sont-elles continues ? Dérivables ?

1) la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2) la fonction g définie par : $g(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1) Selon les théorèmes généraux, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. En particulier, elle est dérivable, et a fortiori continue sur $\mathbb{R}^*$.

De plus, on a : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ (par encadrement). Donc : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$. La fonction f est donc continue en 0.

Enfin, pour tout réel x non nul, on a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \sin(1/x)$$

Or $\sin(1/x)$ n'admet pas de limite lorsque x tend vers 0. Donc f n'est pas dérivable en 0.

Conclusion. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et non dérivable en 0.

2) Selon les théorèmes généraux, la fonction g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. En particulier, elle est dérivable, et a fortiori continue sur $\mathbb{R}^*$.

De plus, on a : $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ (par encadrement). Donc : $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0)$. La fonction g est donc continue en 0.

Enfin, pour tout réel x non nul, on a :

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = x\sin(1/x)$$

D'où : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x) - g(0)}{x} = 0$ (par encadrement). Il s'ensuit que g est dérivable en 0 (et que $g'(0) = 0$).

Conclusion. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$. A fortiori, elle est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. — Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Que peut-on dire de f' si f est paire ? Si f est impaire ?

Supposons que f est paire. On a alors pour tout réel x : $f(-x) = f(x)$.

En dérivant terme à terme cette égalité, on obtient : $-f'(-x) = f'(x)$.

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(-x) = -f'(x)$. D'où f' est impaire.

Raisonnement analogue en supposant f impaire.

Conclusion. $[f$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et paire$] \Longrightarrow [f'$ impaire$]$ et $[f$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et impaire$] \Longrightarrow [f'$ paire$]$

Exercice 3. — Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant |x-y|^3$. Prouver que f est constante.

Soit a un réel quelconque. Pour tout réel h non nul, on a (selon l'hypothèse de l'énoncé) :

$$\left|\frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right| \leqslant |h|^2$$

Il s'ensuit que : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = 0$. D'où : $f'(a) = 0$.

Le réel a étant arbitraire dans le raisonnement précédent, on en déduit que f' est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. La fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. — Calculer la dérivée n-ième des fonctions f, g et h respectivement définies par :

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \qquad g(x) = \frac{1}{1+x} \qquad h(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

Selon les théorèmes généraux, les fonctions f, g et h sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$ respectivement.

Pour tout réel $x \neq 1$ et pour tout entier naturel n on a : $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ (récurrence sur n).

Pour tout réel $x \neq -1$ et pour tout entier naturel n on a : $g^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$ (récurrence sur n).

Enfin, pour tout réel $x \neq \pm 1$, on a :

$$h(x) = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) = \frac{1}{2}\left(f(x) + g(x)\right)$$

Par linéarité de la dérivation, on en déduit que pour tout réel $x \neq \pm 1$ et pour tout entier naturel n on a :

$$h^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left(f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{n!}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}\right)$$

Exercice 5. — Sauriez-vous redémontrer les propriétés ci-dessous ?

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \,; \qquad \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1} \,; \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Pour les deux premières, on introduit la fonction f en posant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (1+x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

On a donc : $f(1) = 2^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x on a : $f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}$.

On a donc : $f'(1) = n2^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

Pour la troisième, on introduit la fonction g en posant : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = x^{2n}$.

On calcule ensuite la dérivée n-ème de g de deux manières différentes : directement, ou en écrivant $g(x) = x^n \times x^n$ et en appliquant la formule de Leibniz.

Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Exercice 6. — Etablir les inégalités suivantes :

1) $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin x| \leqslant |x|$.

2) $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |\cos x - \cos y| \leqslant |x - y|$.

3) $\forall x \in\ ]0;1[,\ \sqrt{1-x^2}\ \arcsin(x) < x$.

4) $\forall x > 0,\ \arctan x > \dfrac{x}{1+x^2}$.

1/ Pour $x = 0$ l'inégalité est triviale.

Considérons x un réel strictement positif. La fonction sin est continue sur $[0, x]$, et dérivable sur $]0, x[$: on peut donc lui appliquer le théorème des accroissements finis pour affirmer que :

$$\exists\, c \in]0, x[,\ \frac{\sin(x)}{x} = \cos(c)$$

On en déduit que : $\left|\dfrac{\sin(x)}{x}\right| \leqslant 1$. D'où : $|\sin(x)| \leqslant |x|$.

En résumé, on a établi jusqu'à présent que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |\sin(x)| \leqslant |x|$.

On étend l'inégalité à $\mathbb{R}$ tout entier en utilisant l'imparité de la fonction sin.

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin x| \leqslant |x|$

2/ Pour $x = y$ l'inégalité est triviale.

Considérons x et y deux réels distincts. La fonction cos étant dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$, on peut lui appliquer le théorème des accroissements finis entre x et y. Il existe donc un réel c strictement compris entre x et y tel que :

$$\frac{\cos x - \cos y}{x - y} = \sin(c)$$

On en déduit que : $\left|\dfrac{\cos x - \cos y}{x - y}\right| \leqslant 1$. D'où : $|\cos x - \cos y| \leqslant |x - y|$.

Conclusion. $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |\cos x - \cos y| \leqslant |x - y|$

3/ Soit x un réel tel que $0 < x < 1$. La fonction arcsin est continue sur $[0, x]$, et dérivable sur $]0, x[$: on peut donc lui appliquer le théorème des accroissements finis pour affirmer que :

$$\exists\, c \in]0, x[,\ \frac{\arcsin(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{1 - c^2}}$$

D'où : $\exists\, c \in]0, x[,\ \sqrt{1 - c^2}\arcsin(x) = x$. Or : $\sqrt{1 - c^2} > \sqrt{1 - x^2}$ (puisque $0 < c < x$).

Conclusion. $\forall\, x \in\ ]0, 1[,\ \sqrt{1 - x^2}\arcsin(x) < x$

4/ Soit x un réel strictement positif. La fonction arctan est continue sur $[0, x]$, et dérivable sur $]0, x[$: on peut donc lui appliquer le théorème des accroissements finis pour affirmer que :

$$\exists\, c > 0,\ \frac{\arctan(x)}{x} = \frac{1}{1 + c^2}$$

D'où : $\exists\, c > 0,\ \arctan(x) = \dfrac{x}{1 + c^2}$. Or : $1 + c^2 < 1 + x^2$ (puisque $0 < c < x$).

Conclusion. $\forall\, x > 0$, $\arctan x > \dfrac{x}{1 + x^2}$.

EXERCICE 7. — (Théorème de Rolle et fonctions à valeurs complexes : attention !)
On considère la fonction $f : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que : $\forall\, t \in [0; 2\pi]\,,\ f(t) = \mathrm{e}^{it}$.

1) Calculer $f(0)$ et $f(2\pi)$.* 2) Calculer $f'(t)$ pour tout $t \in [0; 2\pi]$.† 3) Justifier que f' ne s'annule pas sur $[0; 2\pi]$.

1/ $f(0) = f(2\pi) = 1$. 2/ $\forall\, t \in [0; 2\pi]\,,\ f'(t) = ie^{it}$. 3/ $\forall\, t \in [0; 2\pi]\,,\ |f'(t)| = 1$. Donc f' ne s'annule pas sur $[0, 2\pi]$.

Ce mini-exo donne donc un exemple de fonction à valeurs complexes satisfaisant les hypothèses du théorème de Rolle (f est continue sur $[0, 2\pi]$, dérivable sur $]0, 2\pi[$, et $f(0) = f(2\pi)$) ; mais, n'étant pas à valeurs réelles, le théorème de Rolle ne peut lui être appliquée (et de fait la dérivée f' ne s'annule pas sur $[0, 2\pi]$).

EXERCICE 8. — **(Suite récurrente définie *via* une fonction contractante).** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f : x \longmapsto 4 - \dfrac{1}{4}\ln|x|$.

1) Etudier la fonction f, et vérifier que $f([3; 4]) \subset [3; 4]$. Prouver que si x appartient à $[3; 4]$, alors $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{12}$.

➤ La fonction f étant paire, il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}_+^*$. Sur $\mathbb{R}_+^*$, f est dérivable (TG) et on a :

$$\forall\, x > 0,\ f'(x) = -\frac{1}{4x}$$

La fonction f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par parité, elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$.

➤ Puisque f est continue sur $[3, 4]$, on a : $f([3; 4]) = [f(4), f(3)]$.

Or : $f(4) = 4 - \dfrac{1}{4}\ln 4 < 4$. Et $f(3) = 4 - \dfrac{1}{4}\ln 3 > 3$ (puisque $\ln(3) < 4$). D'où : $3 < f(3) < f(4) < 4$.

Il s'ensuit que : $f([3; 4]) \subset [3; 4]$.

*. Il n'y a pas de piège.
†. Il n'y a pas de piège ici non plus.

➤ Enfin, pour tout réel $x > 0$, on a : $\forall\, x > 0,\ |f'(x)| = \dfrac{1}{4x}$.

On en déduit que : $\forall\, x \in [3,4], \quad |f'(x)| \leqslant |f'(3)| \leqslant \dfrac{1}{12}$.

Conclusion. $f([3;4]) \subset [3;4]$ et $\forall\, x \in [3,4], \quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{12}$

2) Démontrer qu'il existe un unique réel $\ell \in [3;4]$ tel que $f(\ell) = \ell$.

Pour tout réel $x \in [3,4]$, on pose : $g(x) = f(x) - x$. On a $g(3) \geqslant 0$ (puisque $f(3) \geqslant 3$) et $g(4) \leqslant 0$ (puisque $f(4) \geqslant 4$). La fonction g étant continue sur $[3,4]$, le TVI permet d'affirmer qu'il existe un réel $\ell \in [3,4]$ tel que $g(\ell) = 0$, càd tel que $f(\ell) = \ell$.

Montrons l'unicité de ce réel. Supposons qu'il existe deux réels distincts ℓ et ℓ' dans $[3,4]$ tels que $f(\ell) = \ell$ et $f(\ell') = \ell'$. SNALG, on peut supposer que $\ell < \ell'$. On peut alors appliquer le TAF à f sur $[\ell, \ell']$ pour affirmer que :

$$\exists\, c \in]\ell, \ell'[, \quad f(\ell') - f(\ell) = f'(c)\,(\ell' - \ell)$$

D'où : $\ell' - \ell = f'(c)\,(\ell' - \ell)$. D'où : $|\ell' - \ell| = |f'(c)| \times |\ell' - \ell|$.

D'après la question précédente, on en déduit que : $|\ell' - \ell| \leqslant \dfrac{1}{12} \times |\ell' - \ell|$.

Donc : $1 \leqslant \dfrac{1}{12}\ldots$ Absurde. Il s'ensuit que $\ell = \ell'$, ce qui fournit l'unicité désirée.

Conclusion. $\exists!\, \ell \in [3,4],\ f(\ell) = \ell$

3) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$, et $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Justifier que pour tout entier naturel n, $u_n \in [3;4]$.

Récurrence immédiate en utilisant la question 1 ($f([3;4]) \subset [3;4]$).

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \dfrac{1}{12}\ |u_n - \ell|$.

Soit n un entier naturel. Si $u_n = \ell$, alors $u_{n+1} = \ell$ et l'inégalité est vérifiée.

Sinon, on peut appliquer le TAF à la fonction f entre u_n et ℓ pour affirmer qu'il existe un réel c entre u_n et ℓ tel que :

$$\frac{f(u_n) - f(\ell)}{u_n - \ell} = f'(c) \Longleftrightarrow \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} = f'(c) \Longrightarrow \left|\frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell}\right| = |f'(c)|$$

Or d'après la question 1, on a : $|f'(c)| \leqslant \dfrac{1}{12}$. Il s'ensuit que : $\left|\dfrac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell}\right| \leqslant \dfrac{1}{12}$.

Conclusion. $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \dfrac{1}{12}\ |u_n - \ell|$

c) En déduire que pour tout entier naturel n, $|u_n - \ell| \leqslant \left(\dfrac{1}{12}\right)^n$.

Récurrence immédiate sur n (hérédité fournie par la question précédente, l'initialisation provenant de $|u_0 - \ell| \leqslant 1$ puisque u_0 et ℓ sont dans $[3,4]$.

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leqslant \left(\dfrac{1}{12}\right)^n$

Or : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{12}\right)^n = 0$. On en déduit que : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} |u_n - \ell| = 0$.

Par conséquent, la suite (u_n) converge vers ℓ.

Exercice 9. — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Montrer que f n'est pas périodique.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable, telle que f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Par l'absurde, supposons que f est périodique. Il existe un réel $T > 0$ tel que f est T-périodique. Sur l'intervalle $[0, T]$, la fonction f vérifie les hypothèses du théorème de Rolle. Il existe donc un réel $c \in]0, T[$ tel que $f'(c) = 0$: contradiction (puisque f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$).

Conclusion. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, alors f n'est pas périodique.

Exercice 10. — **(Règle de l'Hospital)** ‡. Soient f et g deux fonctions vérifiant les hypothèses des accroissements finis sur $[a; b]$. On suppose de plus que g' ne s'annule pas sur $]\,a; b\,[$.

Montrer qu'il existe un réel c dans $]\,a; b\,[$ tel que : $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Pour tout réel $x \in [a, b]$, on pose :

$$h(x) = g(x)\,(f(b) - f(a)) - f(x)(g(b) - g(a))$$

Conclusion. La fonction h est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ (hypothèses + TG). En outre :

$$h(a) = g(a)\,(f(b) - f(a)) - f(a)(g(b) - g(a)) = g(a)f(b) - f(a)g(b)$$
$$\text{et} \quad h(b) = g(b)\,(f(b) - f(a)) - f(b)(g(b) - g(a)) = g(a)f(b) - f(a)g(b)$$

Ainsi : $h(a) = h(b)$. La fonction h satisfait donc les hypothèses du théorème de Rolle. Par suite :

$$\exists\, c \in \,]\,a; b\,[\,, \quad h'(c) = 0$$

Donc : $\exists\, c \in \,]\,a; b\,[\,, \quad g'(c)\,(f(b) - f(a)) - f'(c)(g(b) - g(a)) = 0$.

Puisque g' ne s'annule pas sur $[a, b]$, on peut conclure : $\exists\, c \in \,]\,a; b\,[\,, \quad \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Exercice 11. — Déterminer : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left[(x+1)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right]$

Pour tout réel $u > 0$, notons : $f(u) = u\mathrm{e}^{\frac{1}{u}}$.

Soit x un réel strictement positif. La fonction f est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$ (car f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ selon les théorèmes généraux).

On peut donc lui appliquer le TAF et affirmer que :

$$\exists\, c \in]x, x+1[, \quad f(x+1) - f(x) = f'(c) \qquad (\spadesuit)$$

Or : $f'(c) = \mathrm{e}^{\frac{1}{c}}\left(1 - \dfrac{1}{c}\right)$. D'où : $\lim\limits_{c \to +\infty} f'(c) = 1 \qquad (\clubsuit)$.

Conclusion. D'après ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$) : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left[(x+1)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right] = 1$.

‡. Du nom du marquis de l'Hospital (1661-1704), qui fut un élève de Jean Bernoulli (1667-1748), mathématicien suisse.

EXERCICE 12. — **(Convergence des séries de Riemann)**. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit une suite $(u_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ en posant :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad u_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}$$

Le but de l'exercice est d'étudier la limite de la suite (u_N) en fonction des valeurs de α.

1) (Le cas $\alpha = 1$) — A l'aide du théorème des accroissements finis, établir que : $\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{N} \geqslant \ln(N+1) - \ln(N)$.
En déduire la limite de la suite (u_N) dans le cas où $\alpha = 1$.

2) (Le cas $\alpha \leqslant 0$) — La suite $(u_N)_N$ étant (positive) et croissante, elle admet une limite finie ou tend vers $+\infty$.

   a) On suppose que $(u_N)_N$ admet une limite finie ℓ. Montrer que : $u_{N+1} - u_N$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$.

   b) En déduire une condition nécessaire sur α pour que $(u_N)_N$ converge.

3) (Le cas $\alpha > 0,\ \alpha \neq 1$) — Sans vouloir tuer tout suspense, la condition nécessaire de la question précédente n'est pas suffisante. Et c'est l'objet de cette question de préciser cette affirmation.
On suppose donc $\alpha > 0$ et $\alpha \neq 1$.

   a) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = x^{1-\alpha}$.
   Justifier brièvement que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, calculer sa dérivée, et donner son sens de variation.

   b) Soit n un entier naturel non nul. Etablir que : $\exists\, c \in \,]\,n; n+1\,[\,, \quad \frac{1}{c^\alpha} = \frac{(n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

   c) Dans cette question, on suppose $0 < \alpha < 1$.

      i) Soit n un entier naturel non nul. Déduire de la question précédente que : $\frac{1}{n^\alpha} \geqslant \frac{(n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

      ii) Etablir alors que : $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \geqslant \frac{1}{1-\alpha}\left[(N+1)^{1-\alpha} - 1\right]$

      iii) En déduire la limite de (u_N) dans le cas où $0 < \alpha < 1$.

   d) Dans cette question, on suppose que $\alpha > 1$. Prouver que (u_N) est convergente.

Pour la correction de ce problème, voir épilogue du chapitre 17 (dans le pdf, page 440).

EXERCICE 13. — Dans cet exercice, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ ouvert et non-vide.

1) Enoncer le théorème de Rolle.

   Voir cours.

2) Soit h une fonction de I vers $\mathbb{R}$, dérivable sur I, et p un entier naturel, $p \geqslant 2$. On suppose que h s'annule p fois sur I, démontrer que h' s'annule au moins $p-1$ fois sur I.

   Notons $x_1, \ldots, x_p$ les valeurs d'annulation de h. Quitte à renuméroter ces réels, on peut supposer : $x_1 < \ldots < x_p$.

   Sur chacun des intervalles $[x_k, x_{k+1}]$ (avec $k \in [\![1, p-1]\!]$), la fonction h vérifie les hypothèses du théorème de Rolle. On peut donc affirmer que :

$$\forall k \in [\![1, p-1]\!],\ \exists c_k \in]x_k, x_{k+1}[,\ h'(c_k) = 0$$

   Les réels $c_1, \ldots, c_{p-1}$ sont $p-1$ valeurs d'annulation de h'.

   Conclusion. Si h est dérivable sur I et à valeurs réelles, et si h s'annule p fois sur I, alors h' s'annule au moins $p-1$ fois sur I.

3) On considère les fonctions a et b de $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définies en posant pour tout réel $x>0$:

$$a(x) = 3x^{-20} + x^{-10} + 4x^{10} + 2x^{20} + 11x^{30} \qquad \text{et} \qquad b(x) = -150x^{-51} - 40x^{-41} - 80x^{-21} - 20x^{-11}$$

On suppose que b s'annule au plus 3 fois dans $]0;+\infty[$. Montrer que a s'annule au plus 4 fois dans $]0;+\infty[$.

Soit $x>0$. Posons : $h(x) = \dfrac{a(x)}{x^{30}}$. On a : $h(x) = 3x^{-50} + x^{-40} + 4x^{-20} + 2x^{-10} + 11$.

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x > 0,\ h'(x) = -150x^{-51} - 40x^{-41} - 80x^{-21} - 20x^{-11} = b(x) \text{ (quelle chance !)}$$

Supposons que a s'annule 5 fois (au moins) sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors h s'annule 5 fois (au moins) sur $\mathbb{R}_+^*$, et d'après la question précédente, $h' = b$ s'annule 4 fois (au moins) sur $\mathbb{R}_+^*$: ce qui contredit l'hypothèse faite sur b.

Conclusion. La fonction a s'annule au plus 4 fois dans $]0;+\infty[$.

Exercice 14. — (**DS9 mars 2018**). On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{2-\ln(x)}$.

1) Préciser l'ensemble de définition D de f, puis dresser le tableau de variation de f.

2) Montrer que l'intervalle $[1;\mathrm{e}]$ est stable par f. En déduire l'existence d'un unique point fixe a pour f dans $[1;\mathrm{e}]$.

3) On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - a| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - a|$$

4) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - a| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (\mathrm{e}-1)$ puis en déduire la limite de la suite u.

1) Le réel $\sqrt{2-\ln(x)}$ est défini SSI $\ln(x)$ est défini et $2-\ln(x) \geqslant 0$, càd SSI $0 < x \leqslant \mathrm{e}^2$. L'ensemble de définition de f est donc $\boxed{D =]0,\mathrm{e}^2]}$.

La fonction f est continue sur D et dérivable sur $D\setminus\{\mathrm{e}^2\}$ d'après les théorèmes généraux, et on a :

$$\forall x \in]0,\mathrm{e}^2[,\ f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{2-\ln(x)}}$$

On en déduit que f est strictement décroissante sur D. En outre $f(\mathrm{e}^2) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

x	0		e^2
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0

2) La fonction f est continue et strictement décroissante sur D, donc en particulier sur $[1,\mathrm{e}]$. A ce titre, elle réalise une bijection de $[1,\mathrm{e}]$ sur $[f(\mathrm{e}), f(1)]$, càd sur l'intervalle $[1,\sqrt{2}]$. Puisque $\sqrt{2} \in [1,\mathrm{e}]$, on en déduit que : $\boxed{[1,\mathrm{e}] \text{ est stable par } f}$.

Puisque la fonction f est continue sur $[1,\mathrm{e}]$ et qu'elle laisse stable ce segment, le théorème du point fixe permet d'affimer qu'il existe un réel a tel que $f(a) = a$. Comme en outre la fonction $x \longmapsto f(x) - x$ est strictement décroissante sur $[1,\mathrm{e}]$, a est l'unique point fixe de la fonction f.

3) Puisque u_0 appartient à l'intervalle stable $[1,\mathrm{e}]$, tous les termes de la suite u appartiennent à $[1,\mathrm{e}]$; ce qui justifie en particulier que la suite u est bien définie.

Soit n un entier naturel quelconque. Puisque u_n et a appartiennent à l'intervalle $[1,\mathrm{e}]$, et que f est continue (*resp.*dérivable) sur $[1,\mathrm{e}]$ (*resp.*sur $]1,\mathrm{e}[$), on peut appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction f entre a et u_n :

il existe un réel c_n compris entre a et u_n tel que : $f'(c_n) = \dfrac{f(u_n) - f(a)}{u_n - a}$

$\Longrightarrow$ il existe un réel c_n compris entre a et u_n tel que : $f'(c_n) = \dfrac{u_{n+1} - a}{u_n - a}$

$\Longrightarrow$ il existe un réel c_n compris entre a et u_n tel que : $u_{n+1} - a = f'(c_n) \times (u_n - a)$

$\Longrightarrow$ il existe un réel c_n compris entre a et u_n tel que : $|u_{n+1} - a| = |f'(c_n)| \times |u_n - a| \quad (\spadesuit)$

Par ailleurs, pour tout réel $x \in \,]1, \mathrm{e}[$ on a :

$$|f'(x)| = \left| \frac{1}{2x\sqrt{2 - \ln(x)}} \right| \leqslant \left| \frac{1}{2\sqrt{2 - \ln(x)}} \right| \leqslant \frac{1}{2} \qquad (\clubsuit)$$

la première majoration provenant du fait que $x \geqslant 1$, et la seconde du fait que $\sqrt{2 - \ln(x)} \geqslant 1$ sur $[1, \mathrm{e}]$.

On déduit de ($\spadesuit$) et de ($\clubsuit$) que : $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - a| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - a|}$.

4) L'assertion "$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - a| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n (\mathrm{e} - 1)$" se déduit de la question précédente par une récurrence immédiate.

Puisque par ailleurs $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - a| = 0$, ce qui signifie que : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a}$.