Chapitre 16 — "L'essentiel" sur les applications de la dérivation

Préambule. L'objectif de ce (court) chapitre est de voir quelques nouvelles propriétés des fonctions à valeurs réelles dérivables. Parmi ces propriétés, l'énoncé "superstar" est le théorème des accroissements finis, qui marque la fin d'un chemin entamé au mois de septembre, et qui a de très nombreuses et impmortantes applications en analyse.

Table des matières

---

1. Rappels

Définition 1 - (Rappel) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction, et soit $a \in I$. La fonction f **est dérivable en** a si la limite quand h tend vers 0 du taux d'accroissement de f entre a et $(a+h)$ existe et est finie. Lorsque c'est le cas, on note

$$f'(a) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ (ou encore } f'(a) = \lim_{h \longrightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\text{)}$$

Définition 2 - f est **dérivable à droite** de a si $\lim_{h \xrightarrow{h>0} 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est finie ; f est **dérivable à gauche** de a si $\lim_{h \xrightarrow{h<0} 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est finie.

Lemme 1 - f est dérivable en a SSI elle est dérivable à droite et à gauche de a <u>et</u>

$$\lim_{h \xrightarrow{h>0} 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \xrightarrow{h<0} 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \; (= f'(a))$$

Exemple - La fonction valeur absolue est dérivable à droite de 0, et dérivable à gauche de 0. Mais elle n'est pas dérivable en 0 puisque :

$$\lim_{h \xrightarrow{h>0} 0} \frac{|h|}{h} = 1 \qquad \text{tandis que} \qquad \lim_{h \xrightarrow{h<0} 0} \frac{|h|}{h} = -1$$

L'énoncé ci-dessous a été vu plus tôt cette année, et fait le lien entre la dérivabilité d'une fonction en un point, et l'existence d'un DL1 pour cette fonction en ce point.

Théorème 1 - Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction, et soit $a \in I$. La fonction f est dérivable en a SSI il existe un scalaire ℓ tel que $f(a+h) = f(a) + h\ell + h\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

Remarque - Cette propriété permet notamment de construire le formulaire des DL1 en 0 pour les fonctions usuelles.

Corollaire 1 - Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

En effet, si f est dérivable en a, alors :

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) = \lim_{h \to 0} f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h) = f(a)$$

Il revient au même d'écrire que : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Ce qui signifie que f est continue en a.

✠

On achève ces rappels par une propriété propre à la continuité, mais qui jouera un rôle crucial dans ce chapitre.

Théorème 2 - (théorème des bornes atteintes). Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Si f est continue sur $[a,b]$, alors f est bornée et atteint ses bornes (f admet un minimum et un maximum sur $[a,b]$).

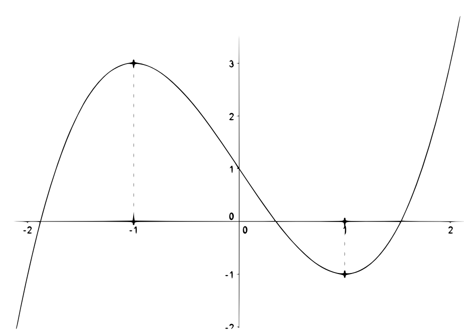
2. Dérivation et extremums — Théorème de Rolle

Définition 3 - Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles, et a un réel de I.

La fonction f admet un **maximum local en** a (*resp.* **minimum local en** a) s'il existe un intervalle ouvert J tel que $a \in J \subset I$, et tel que $f(a)$ soit le maximum (*resp.* minimum) de $f_{|J}$ (la restriction de f à J).

La fonction f admet un **extremum local en** a si $f(a)$ est un maximum local ou un minimum local de la fonction f.

Exemple. La fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto (x+1)(x-1)^2 - 1$, représentée sur la figure ci-contre, admet un maximum local en -1 et un minimum local en 1. Il faut observer que la fonction f ne possède en revanche pas de maximum ni de minimum (global), puisque ses limites en $+\infty$ et $-\infty$ sont $+\infty$ et $-\infty$ respectivement.



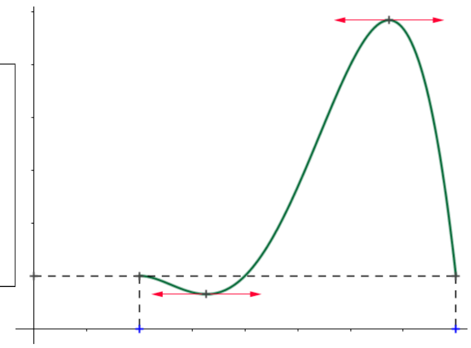
Lemme 2 - Soit f une fonction dérivable sur I (intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$), et soit $c \in I$. Si f admet un extremum local en c, alors $f'(c) = 0$.

Théorème 3 - (Théorème de Rolle).

Si est dérivable sur $]a;b[$, continue sur $[a,b]$, et $f(a)=f(b)$ alors

$$\exists\, c \in\ ]\,a;b\,[\ ,\ \ f'(c)=0$$

.



Il est assez rare que le théorème de Rolle intervienne directement dans un sujet (cela arrive, nous en verrons des exemples en TD). En revanche, le théorème de Rolle est la clef pour établir le théorème des accroissements finis, qui est d'utilisation beaucoup plus fréquente dans les problèmes. C'est l'objet du paragraphe suivant.

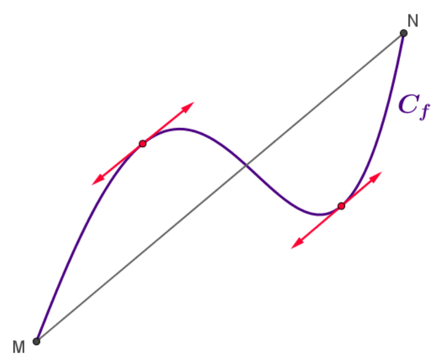
3. Théorème des accroissements finis

Théorème 4 - (Théorème des accroissements finis, "TAF"). Si $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ est dérivable sur $]a,b[$, continue sur $[a;b]$, alors :

$$\exists\, c \in\ ]\,a;b\,[\ ,\ \ f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Interprétation graphique : il existe au moins un réel $c\in]a,b[$ tel que la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse c soit parallèle à la droite joignant les points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses a et b.

Interprétation génératrice de torticolis : le TAF est le "théorème de Rolle en pente".



Interprétation cinématique : sous réserve que vous vous déplaciez "gentiment" (= "de façon dérivable") en voiture, il existe au moins un instant où votre vitesse instantanée aura été égale à votre vitesse moyenne sur le parcours.

✠

La plus spectaculaire application du TAF est l'énoncé suivant, faisant le lien entre le sens de variation d'une fonction dérivable et le signe de sa dérivée.

Corollaire 2 - Soit $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I.

1/ f est croissante sur I SSI $f'\geqslant 0$ sur I

2/ f est décroissante sur I SSI $f'\leqslant 0$ sur I

3/ f est constante sur I SSI $f'=0$ sur I

Une autre conséquence d'usage courant en exo est l'énoncé ci-dessous.

Corollaire 3 - (Inégalité des accroissements finis). Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I, et s'il existe un réel K tel que $|f'| \leqslant K$ sur I, alors :

$$\forall\ (a,b) \in I^2,\ |f(b) - f(a)| \leqslant K\,|b-a|$$

Interprétation cinématique : si vous roulez pendant une heure en ne dépassant jamais la vitesse de 100km/h, vous parcourerez moins de 100 kilomètres !

4. Lipschitzianité

Définition 4 - Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est **lipschitzienne** sur I s'il existe un réel positif K tel que :

$$\forall\ (x,y) \in I^2,\ |f(y) - f(x)| \leqslant K\,|y-x|$$

On peut préciser dans cette situation que f est K-lipschitzienne.

Exemple - Les fonctions cos, sin et arctan sont 1-lipschitziennes sur $\mathbb{R}$.

Exemple - La fonction $x \longmapsto x^2$ est 2-lipschitzienne sur $[0,1]$, et 6-lipschitzienne sur $[0,3]$.

Exemple - La fonction $x \longmapsto x^2$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$; en effet, pour tout entier naturel n, on a $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1 \longrightarrow +\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. Il ne peut donc exister aucun réel K tel que pour tout n on ait : $(n+1)^2 - n^2 \leqslant K$.

Propriété 1 - Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

La fonction f est lipschitzienne sur I SSI f' est bornée sur I.

En particulier, toute fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ est lipschitzienne sur $[a,b]$.

5. Extension aux fonctions à valeurs complexes

Une fois rappelée la définition de dérivabilité pour les fonctions à valeurs complexes, on peut juste observer que f est dérivable en a SSI les fonctions Re f et Im f sont dérivables en a ("pont $\mathbb{R} \longleftrightarrow \mathbb{C}$" pour la dérivabilité)… et s'arrêter là !!!

En effet, les propriétés nouvelles de ce chapitre (théorèmes de Rolle et des accroissements finis essentiellement) reposent sur des propriétés faisant intervenir de manière essentiel la relation d'ordre usuelle dans $\mathbb{R}$, et ne s'appliquent plus aux fonctions à valeurs complexes.

6. Synthèse - A savoir, à savoir faire

- Connaître TOUS les énoncés du chapitre présentés dans ce résumé, et savoir les appliquer.
- En particulier, bien connaître le théorème des accroissements finis et ses applications.