Exercices 16 — Applications de la dérivation

Révisions

Exercice 1. — Sur quelles parties de $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes sont-elles continues ? Dérivables ?

1) la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ 2) la fonction g définie par : $g(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 2. — Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Que peut-on dire de f' si f est paire ? Si f est impaire ?

Exercice 3. — Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant |x-y|^3$. Prouver que f est constante.

Exercice 4. — Calculer la dérivée n-ième des fonctions f, g et h respectivement définies par :

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \qquad g(x) = \frac{1}{1+x} \qquad h(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

Exercice 5. — Sauriez-vous redémontrer les propriétés ci-dessous ?

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n\ ; \qquad \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}\ ; \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Exercice 6. — Etablir les inégalités suivantes :

1) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ |\sin x| \leqslant |x|$.

2) $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |\cos x - \cos y| \leqslant |x-y|$.

3) $\forall\, x \in\ ]\,0;1\,[,\ \sqrt{1-x^2}\ \arcsin(x) < x$.

4) $\forall\, x > 0,\ \arctan x > \dfrac{x}{1+x^2}$.

Exercice 7. — (Théorème de Rolle et fonctions à valeurs complexes : attention !)
On considère la fonction $f : [0;2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que : $\forall\, t \in [0;2\pi]\,,\ f(t) = \mathrm{e}^{it}$.

1) Calculer $f(0)$ et $f(2\pi)$.* 2) Calculer $f'(t)$ pour tout $t \in [0;2\pi]$.† 3) Justifier que f' ne s'annule pas sur $[0;2\pi]$.

Exercice 8. — **(Suite récurrente définie *via* une fonction contractante).** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f : x \longmapsto 4 - \dfrac{1}{4}\ \ln|x|$.

1) Etudier la fonction f, et vérifier que $f([3;4]) \subset [3;4]$. Prouver que si x appartient à $[3;4]$, alors $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{12}$.

2) Démontrer qu'il existe un unique réel $\ell \in [3;4]$ tel que $f(\ell) = \ell$.

3) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$, et $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

   a) Justifier que pour tout entier naturel n, $u_n \in [3;4]$.

   b) Montrer que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \dfrac{1}{12}\ |u_n - \ell|$.

   c) En déduire que pour tout entier naturel n, $|u_n - \ell| \leqslant \left(\dfrac{1}{12}\right)^n$.

Exercice 9. — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Montrer que f n'est pas périodique.

Exercice 10. — **(Règle de l'Hospital)**‡. Soient f et g deux fonctions vérifiant les hypothèses des accroissements finis sur $[a;b]$. On suppose de plus que g' ne s'annule pas sur $]\,a;b\,[$.

Montrer qu'il existe un réel c dans $]\,a;b\,[$ tel que : $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

*. Il n'y a pas de piège.

†. Il n'y a pas de piège ici non plus.

‡. Du nom du marquis de l'Hospital (1661-1704), qui fut un élève de Jean Bernoulli (1667-1748), mathématicien suisse.

Exercice 11. — Déterminer : $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left[(x+1)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}}-x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right]$

Exercice 12. — **(Convergence des séries de Riemann)**. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. On définit une suite $(u_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ en posant :

$$\forall\, N\in\mathbb{N}^*,\quad u_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{\alpha}}$$

Le but de l'exercice est d'étudier la limite de la suite (u_N) en fonction des valeurs de α.

1) (Le cas $\alpha=1$) — A l'aide du théorème des accroissements finis, établir que : $\forall\, N\in\mathbb{N}^*,\quad \dfrac{1}{N}\geqslant\ln(N+1)-\ln(N)$.
En déduire la limite de la suite (u_N) dans le cas où $\alpha=1$.

2) (Le cas $\alpha\leqslant 0$) — La suite $(u_N)_N$ étant (positive) et croissante, elle admet une limite finie ou tend vers $+\infty$.

   a) On suppose que $(u_N)_N$ admet une limite finie ℓ. Montrer que : $u_{N+1}-u_N$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$.

   b) En déduire une condition nécessaire sur α pour que $(u_N)_N$ converge.

3) (Le cas $\alpha>0$, $\alpha\neq 1$) — Sans vouloir tuer tout suspense, la condition nécessaire de la question précédente n'est pas suffisante. Et c'est l'objet de cette question de préciser cette affirmation.
On suppose donc $\alpha>0$ et $\alpha\neq 1$.

   a) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant : $\forall\, x\in\mathbb{R}_+^*,\quad f(x)=x^{1-\alpha}$.
   Justifier brièvement que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, calculer sa dérivée, et donner son sens de variation.

   b) Soit n un entier naturel non nul. Etablir que : $\exists\, c\in\,]n;n+1[\,,\quad \dfrac{1}{c^{\alpha}}=\dfrac{(n+1)^{1-\alpha}-n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

   c) Dans cette question, on suppose $0<\alpha<1$.

      i) Soit n un entier naturel non nul. Déduire de la question précédente que : $\dfrac{1}{n^{\alpha}}\geqslant\dfrac{(n+1)^{1-\alpha}-n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

      ii) Etablir alors que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{\alpha}}\geqslant\frac{1}{1-\alpha}\left[(N+1)^{1-\alpha}-1\right]$

      iii) En déduire la limite de (u_N) dans le cas où $0<\alpha<1$.

   d) Dans cette question, on suppose que $\alpha>1$. Prouver que (u_N) est convergente.

Exercice 13. — Dans cet exercice, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ ouvert et non-vide.

1) Enoncer le théorème de Rolle.

2) Soit h une fonction de I vers $\mathbb{R}$, dérivable sur I, et p un entier naturel, $p\geqslant 2$. On suppose que h s'annule p fois sur I, démontrer que h' s'annule au moins $p-1$ fois sur I.

3) On considère les fonctions a et b de $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définies en posant pour tout réel $x>0$:

$$a(x)=3x^{-20}+x^{-10}+4x^{10}+2x^{20}+11x^{30}\qquad\text{et}\qquad b(x)=-150x^{-51}-40x^{-41}-80x^{-21}-20x^{-11}$$

On suppose que b s'annule au plus 3 fois dans $]0;+\infty[$. Montrer que a s'annule au plus 4 fois dans $]0;+\infty[$.

Exercice 14. — (**DS9 mars 2018**). On considère la fonction f définie par : $f(x)=\sqrt{2-\ln(x)}$.

1) Préciser l'ensemble de définition D de f, puis dresser le tableau de variation de f.

2) Montrer que l'intervalle $[1;\mathrm{e}]$ est stable par f. En déduire l'existence d'un unique point fixe a pour f dans $[1;\mathrm{e}]$.

3) On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0=1$ et $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n)$. Montrer que :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad |u_{n+1}-a|\leqslant\frac{1}{2}\,|u_n-a|$$

4) En déduire que : $\forall\, n\in\mathbb{N},\quad |u_n-a|\leqslant\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}(\mathrm{e}-1)$ puis en déduire la limite de la suite u.