

# OBJECTIF PRÉPA — EXERCICES

## FACTORIELLE D'UN ENTIER NATUREL

**EXERCICE 1.** — Calculer ou simplifier les expressions suivantes :

$$1/ A = \frac{4!}{2!}$$

$$2/ B = \frac{5! \times 4!}{3! \times 6!}$$

$$3/ C = \frac{(n+1)!}{n!}$$

$$4/ D = \frac{(n+1) \times n!}{(n+2)!}$$

$$5/ E = \frac{(n+2)!}{(n-1)!}$$

$$6/ F = \frac{(n+1)! \times (n-1)!}{(n!)^2}$$

**EXERCICE 2.** — Montrer par récurrence sur  $n$  la propriété suivante :  $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k! \leq (n+1)!$

**EXERCICE 3.** — (Suite de Wallis).

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1, u_1 = 1$  et la relation de récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} u_n$ .

Etablir que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$

**EXERCICE 4.** — Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = \frac{2}{3}$ , et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} u_n$$

1/ Calculer les valeurs de  $u_1$  et  $u_2$ .

2/ Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2^{2n+3} (n+2)! n!}{(2n+4)!}$$

## SOMMES (GÉNÉRALITÉS & EXEMPLES)

**EXERCICE 5.** — Etablir par récurrence sur  $N$  que :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^N n = \frac{N(N+1)}{2}$$

**EXERCICE 6.** — Soit  $N$  un entier naturel. Calculer les sommes :

$$S_1 = \sum_{n=1}^N n, \quad S_2 = \sum_{k=1}^N k \quad \text{et} \quad S_3 = \sum_{k=1}^N N.$$

**EXERCICE 7.** — Soit  $q \in \mathbb{R}$ , tel que  $q \neq 1$ . Etablir par récurrence sur  $n$  que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

\*. Càd, moins rigoureusement mais plus explicitement :  $1 + 2 + \dots + N = \frac{N(N+1)}{2}$

**EXERCICE 8.** — Soit  $q \in \mathbb{R}$ . Calculer  $S = \sum_{k=0}^n q^{2k}$ .

**EXERCICE 9.** — Etablir par récurrence sur  $N$  que : †

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^N n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

**EXERCICE 10.** — Etablir par récurrence sur  $N$  que :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^N n^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4}$$

### SOMMES TÉLÉSCOPIQUES

**EXERCICE 11.** — Soit  $n$  un entier naturel. Calculer  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ . ‡

**EXERCICE 12.** — Soit  $n$  un entier naturel. Calculer  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ . §

**EXERCICE 13.** — \* Soit  $n$  un entier naturel non nul. Calculer  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)}$ .

**EXERCICE 14.** — \* Soit  $n$  un entier naturel non nul. Calculer  $\sum_{k=0}^n (k \times k!)$

**EXERCICE 15.** — \* Soit  $n$  un entier naturel non nul. Calculer  $\sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!}$

**EXERCICE 16.** — Etablir que pour tout entier  $n \geq 2$ , on a :  $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ .

En déduire que pour tout entier naturel  $N$  non nul on a :  $1 \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \leq 2$ .

### SUITES ADJACENTES

**EXERCICE 17.** — On définit deux suites  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  en posant pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = u_n - \frac{1}{n}$$

1/ Montrer que  $(u_n)_n$  est décroissante, et que  $(v_n)_n$  est croissante.

2/ Calculer  $u_n - v_n$  pour tout entier naturel  $n$ . Conclure.

†. Càd, moins rigoureusement mais plus explicitement :  $1^2 + 2^2 + \dots + N^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$

‡. On pourra déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que :  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$ .

§. On pourra déterminer trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que :  $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$ .

**EXERCICE 18.** — On pose pour tout entier naturel non nul  $n$  :  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$  et  $U_n = S_n + \frac{1}{n \times n!}$

1/ Montrer que  $(S_n)$  et  $(U_n)$  sont monotones, de monotonies opposées.

2/ En déduire que  $(S_n)$  et  $(U_n)$  convergent vers une limite commune, que nous noterons  $\ell$ .

### INTÉGRALES ET PRIMITIVES USUELLES

**EXERCICE 19.** — Déterminer une (puis toutes) primitive de la fonction  $f$  dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \mapsto x^4$	4) $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$	6) $f : x \mapsto e^{-x}$
2) $f : x \mapsto 2x + 3$	5) $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	7) $f : x \mapsto 3e^{2x} - e^{4x}$
3) $f : x \mapsto 6x^2 - 4x + 7$		8) $f : x \mapsto \sin(2x) + \cos(3x)$

**EXERCICE 20.** — Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1 = \int_0^1 x^2 dx$	3) $I_3 = \int_0^1 \frac{1}{x-4} dx$	5) $I_5 = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$
2) $I_2 = \int_0^1 x^n dx$	4) $I_4 = \int_0^{\ln(2)} e^{-x} dx$	6) $I_6 = \int_0^1 (1-x)^n dx$

### INTÉGRATION PAR PARTIES

**EXERCICE 21.** — A l'aide d'une (ou plusieurs) IPP, calculer chacune des intégrales suivantes.

1/ $\int_0^1 (2x+1)e^x dx$	3/ $\int_0^1 (x^2+1)e^x dx$
2/ $\int_{-\pi}^{\pi} (1-x)\cos(x) dx$	4/ $\int_1^e \ln(x) dx$

**EXERCICE 22.** — On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$$

A l'aide d'une IPP, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n-1} - I_n = \frac{1}{n!}$$