

Chapitre 16 : Applications de la dérivation

1 – Généralités

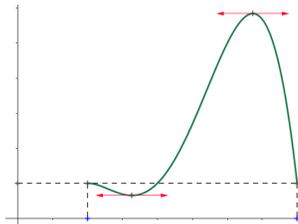
Rappels : notion de fonction dérivable en a , de nombre dérivé à gauche ou à droite en a . Une fonction f est dérivable en a SSI f admet un DL à l'ordre 1 en a . Conséquence : dérivable implique continue (réciproque fausse).

2 – Dérivation et extremums

Propriété. Soit f une fonction dérivable sur I (intervalle ouvert non vide de \mathbb{R}), et soit $c \in I$. Si f admet un extremum local en c , alors $f'(c) = 0$.

La réciproque est fausse ($x \mapsto x^3 \dots$), et l'énoncé n'est plus valide sur segment.

Théorème de Rolle. Si est dérivable sur $]a; b[$, continue sur $[a, b]$, et $f(a) = f(b)$ alors $\exists c \in]a; b[$, $f'(c) = 0$.



Remarque : si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur \mathbb{R} et s'annule (au moins) n fois sur \mathbb{R} , alors f' s'annule (au moins) $n - 1$ fois sur \mathbb{R} .

3 – Dérivation et sens de variation

Théorème des accroissements finis (TAF). Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur $]a, b[$, continue sur $[a, b]$, alors $\exists c \in]a; b[$, $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Interprétation graphique : il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse c soit parallèle à la droite joignant les points de \mathcal{C}_f d'abscisses a et b .

Interprétation cinématique : sous réserve que vous vous déplaçiez "gentiment" (= "de façon dérivable") en voiture, il existe au moins un instant

où votre vitesse instantanée aura été égale à votre vitesse moyenne sur le parcours.

Interprétation génératrice de torticolis : le TAF est le "théorème de Rolle en pente".

Corollaire. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I .

1) f est croissante sur I SSI $f' \geq 0$ sur I

2) f est décroissante sur I SSI $f' \leq 0$ sur I

3) f est monotone sur I SSI $f' = 0$ sur I

Corollaire (Inégalité des accroissements finis).

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I , et s'il existe un réel K tel que $|f'| \leq K$ sur I , alors : $\forall (a, b) \in I^2$, $|f(b) - f(a)| \leq K |b - a|$.

Interprétation cinématique : si vous roulez pendant une heure en ne dépassant jamais la vitesse de 100km/h, vous parcourrez moins de 100 kilomètres !

Remarque : la condition " $|f'| \leq K$ sur I " est en particulier vérifiée lorsque I est un segment et que f est de classe \mathcal{C}^1 .

Application : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$.

4 – Lipschitzianité

Définition. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. f est **lipschitzienne** sur I s'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall (x, y) \in I^2$, $|f(y) - f(x)| \leq K |y - x|$.

Exemples. 1) \cos , \sin et \arctan sont 1-lipschitziennes sur \mathbb{R} .

2) La fonction $x \mapsto x^2$ est 2-lipschitzienne sur $[0, 1]$.

3) La fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas lipschitzienne sur \mathbb{R} ; en effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1 \rightarrow +\infty$.

En revanche, d'après l'inégalité des accroissements finis :

Propriété. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I . La fonction f est lipschitzienne sur I SSI f' est bornée sur I .

QUESTIONS DE COURS

- ▶ **Propriété.** Soit f une fonction dérivable sur I (intervalle ouvert non vide de \mathbb{R}), et soit $c \in I$. Si f admet un extremum local en c , alors $f'(c) = 0$.
- ▶ **Théorème de Rolle.**
- ▶ **Théorème des accroissements finis.**
- ▶ **Inégalité des accroissements finis.**
- ▶ **Exercice.** Etablir que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \arctan(x) \leq x$.

- ▶ **Exercice.** Etablir que : $\forall x \in]0; 1[, \sqrt{1-x^2} \arcsin(x) < x$.

SUR LE PRINCIPE DU VOLONTARIAT

- ▶ **Propriété.** Soit $f \in \mathbb{R}^I$, une fonction dérivable sur I . La fonction f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I
- ▶ **Propriété** Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I . Alors : f lipschtzienne sur I SSI f' bornée sur I