Problème de février

Exercice 1 — Une fonction continue sur $\mathbb{R}$, non dérivable en une infinité de points

On considère la fonction ω définie sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \omega(x) = \min_{n\in\mathbb{Z}} |x-n|$$

Pour tout réel x, $\omega(x)$ est donc la distance entre x et l'entier relatif le plus proche de x.

1/ **Question préliminaire**. Etablir que pour tout réel x, on a : $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.

2/ Etablir que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \omega(x) = \min\left(x - \lfloor x \rfloor,\ \lfloor x+1 \rfloor - x\right)$.

3/ Montrer que la fonction ω est 1-périodique, et paire.

4/ Déterminer l'expression de $\omega(x)$ pour tout réel x de $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

5/ Tracer la courbe représentative de ω sur $[-2, 2]$.

6/ Etablir que ω est continue en 0 et en $\dfrac{1}{2}$. En déduire que ω est continue sur $\mathbb{R}$.

7/ Etablir que ω est non dérivable en tout réel s'écrivant $\dfrac{1}{2}k$, pour k entier relatif quelconque.

Remarque : cette fonction ω est l'élément de base pour la construction d'une fonction vraiment "très étrange" : la fonction de Van Der Waerden, qui est continue sur $\mathbb{R}$, mais dérivable en aucun réel !

Exercice 2 — Pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on note $T(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$. On considère l'ensemble S défini par

$$S = \left\{T(a,b,c) \,|\, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$$

On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1) Montrer que S est un sous-groupe de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

2) Exprimer A^2, B^2, AB et BA à l'aide de I, A et B.

3) Soient (a,b,c) et (a',b',c') dans $\mathbb{R}^3$, $M = T(a,b,c)$ et $M' = T(a',b,',c')$. Calculer le produit MM'.

4) Montrer que S est un sous-anneau de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Est-il commutatif ?

5) L'anneau S est-il un corps ?

Problème 1 — (Convergence des séries de Riemann).

Soit α un nombre réel. On définit une suite $(u_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ en posant :

$$\forall\, N \in \mathbb{N}^*, \quad u_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}$$

Le but de l'exercice est d'étudier la limite de la suite (u_N) en fonction des valeurs de α.

Partie A - Quelques cas particuliers

1) Soit N un entier naturel non nul. Calculer u_N lorsque $\alpha = 0$. En déduire la limite de (u_N) dans ce cas.

2) Soit N un entier naturel non nul.

   a) Rappeler les formules donnant $A_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} n$, $B_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} n^2$ et $C_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} n^3$.

   b) Déduire de la question précédente la limite de la suite (u_N) dans les cas où $\alpha = -1$, $\alpha = -2$ et $\alpha = -3$.

3) Rappeler l'énoncé du théorème des accroissements finis.

   Puis appliquer ce théorème à la fonction ln (logarithme népérien) sur l'intervalle $[N;\, N+1]$.

4) Etablir que : $\forall\, N \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{N} \geqslant \ln(N+1) - \ln(N)$. En déduire la limite de la suite (u_N) dans le cas où $\alpha = 1$.

Partie B - Généralisation - le cas α strictement négatif

Dans cette partie, on suppose : $\alpha < 0$.

1) Montrer que $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} N^\alpha = 0$.

2) En déduire la limite de (u_N) dans le cas où $\alpha < 0$.

Partie C - Généralisation - le cas α strictement positif

Dans cette partie, on suppose $\alpha > 0$ <u>et</u> $\alpha \neq 1$.

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = x^{1-\alpha}$.
   Justifier brièvement que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, calculer sa dérivée, et donner son sens de variation.

2) Soit n un entier naturel non nul. Etablir que :

$$\exists\, c \in \,]\, n; n+1\, [\,, \quad \frac{1}{c^\alpha} = \frac{(n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

3) Dans cette question, on suppose $0 < \alpha < 1$.

   a) Soit n un entier naturel non nul. Déduire de la question précédente que : $\dfrac{1}{n^\alpha} \geqslant \dfrac{(n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

   b) Etablir alors que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \geqslant \frac{1}{1-\alpha}\left[(N+1)^{1-\alpha} - 1\right]$

   c) En déduire la limite de (u_N) dans le cas où $0 < \alpha < 1$.

4) Dans cette question, on suppose que $\alpha > 1$. Prouver que (u_N) est convergente.

Partie D - Synthèse

A l'aide des résultats établis dans les parties précédentes, indiquer pour quelles valeurs du réel α la suite (u_N) a une limite infinie, et pour quelles valeurs de α elle possède une limite finie.