

PROBLÈME DE LA SEMAINE 7 — CORRIGÉ

EXERCICE 1 — Décrire les éléments de S_6 .

Ceci revient à dénombrer dans S_6 les permutations qui sont :

- des transpositions ;
- des 3-cycles ;
- des 4-cycles ;
- des 5-cycles ;
- des 6-cycles ;
- des produits de 2 transpositions à supports disjoints ;
- des produits de 3 transpositions à supports disjoints ;
- des produits de 2 3-cycles à supports disjoints ;
- et j'en oublie peut-être...

Une fois la liste précédente complétée, il s'agit de compter le nombre de représentants de chaque espèce (inspirez-vous pour cela de ce que l'on a fait en cours pour S_5) ; si tout va bien, le total doit donner $6!$, càd 720.

Question bonus : quels sont les éléments de S_6 qui ont pour signature 1 ? Combien en existe-t-il ?

Dans S_6 , il existe :

- 1 identité
- $\binom{6}{2} = 15$ transpositions ;
- $\binom{6}{3} \times 2 = 40$ 3-cycles ;
- $\binom{6}{4} \times 3! = \binom{6}{2} \times 6 = 90$ 4-cycles ;
- $\binom{6}{5} \times 4! = 6 \times 24 = 144$ 5-cycles ;
- $\binom{6}{6} \times 5! = 120$ 6-cycles ;
- $\binom{6}{2} \times 3 = 45$ produits de 2 transpositions à supports disjoints ;

- $\binom{6}{1} \times \binom{5}{2} \times 2 = 120$ produits d'une transposition et d'un 3-cycle à supports disjoints ;
- $5 \times 3 = 15$ produits de 3 transpositions à supports disjoints ;
- $\binom{5}{2} \times 2 = 40$ produits de 2 3-cycles à supports disjoints ;
- $\binom{6}{2} \times 3! = 90$ produits d'un 4-cycle et d'une transposition à supports disjoints.

Parmi ces éléments, les permutations de signature 1 (les permutations paires, càd les éléments de A_6) sont : l'identité (1), les 3-cycles (40), les 5-cycles (144), les produits de 2 transpositions à supports disjoints (45), les produits de 2 3-cycles à supports disjoints (40), les produits d'un 4-cycle et d'une transposition à supports disjoints (90).

Il existe donc 360 permutations paires dans S_6 , ce que l'on sait déjà grâce au cours :

$$\#(A_6) = \frac{\#(S_6)}{2} = \frac{6!}{2} = \frac{720}{2} = 360$$