Corrigé du DS de Mathématiques n^{0}7 — 28 janvier 2023

Exercice 1 — **(Suites imbriquées et matrices)**. Dans cet exercice, on cherche à déterminer les termes généraux des suites réelles (u_n) et (v_n) définies en posant :

$$u_0 = 1,\ v_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{n+1} = v_n - 2u_n \\ v_{n+1} = 5v_n - 12u_n \end{cases}$$

On pose pour tout entier naturel n : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1/ Justifier brièvement qu'il existe une matrice $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$.

D'après l'énoncé : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -12 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

Conclusion. On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}$.

2/ Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0$.

Récurrence immédiate sur n.

3/ On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible et calculer P^{-1}.

La matrice P est inversible car son déterminant est non-nul ($\det(P) = 1$).

Conclusion. $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

4/ Calculer $D = P^{-1}AP$, et vérifier que D est une matrice diagonale.

Un calcul aisé donne : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

5/ Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.

Récurrence immédiate sur n.

6/ Déduire des questions précédentes les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

Soit n un entier naturel. D'après les questions précédentes : $X_n = A^n X_0 = X_n = PD^nP^{-1}X_0$.

Il s'ensuit que :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2^n \\ 6 - 2^{n+2} \end{pmatrix}$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2 - 2^n \quad \text{et} \quad v_n = 6 - 2^{n+2}$

Problème 1 — $\boxed{\textsc{(Calcul matriciel)}}$
Tout au long de ce problème, on pose :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 4 & -7 & -4 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Partie n^{0}1 — Diagonalisation de la matrice A

1/ On considère la matrice : $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que P est inversible et expliciter P^{-1} (*indication : P^{-1} est à coefficients entiers*).

Soient $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$. On a :

$$PX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_2 + 2x_3 & = & b_1 \\ -x_1 + 2x_3 & = & b_2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 & = & b_3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 - x_3 & = & b_3 \\ x_2 + 2x_3 & = & b_1 \\ -x_1 + 2x_3 & = & b_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 - x_3 & = & b_3 \\ x_2 + 2x_3 & = & b_1 \\ x_2 + 3x_3 & = & b_3 + 2b_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 - x_3 & = & b_3 \\ x_2 + 2x_3 & = & b_1 \\ x_3 & = & b_3 + 2b_2 - b_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 & = & 4b_3 + 6b_2 - 4b_1 \\ x_2 & = & 3b_1 - 4b_2 - 2b_3 \\ x_3 & = & b_3 + 2b_2 - b_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & 2b_3 + 3b_2 - 2b_1 \\ x_2 & = & 3b_1 - 4b_2 - 2b_3 \\ x_3 & = & b_3 + 2b_2 - b_1 \end{array}\right.$$

Conclusion. $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2/ Vérifier que : $P^{-1} \times A \times P = L$.

Par associativité du produit dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, on peut procéder (au choix) de l'une des deux façons suivantes :

➤ On écrit : $P^{-1} \times A \times P = (P^{-1} \times A) \times P$. Alors :

$$P^{-1} \times A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 4 & -7 & -4 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Puis : $$P^{-1} \times A \times P = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

➤ Ou on écrit : $P^{-1} \times A \times P = P^{-1} \times (A \times P)$. Alors :

$$A \times P = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 4 & -7 & -4 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis : $P^{-1} \times A \times P = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Conclusion. quelle que soit la méthode employée, on peut conclure : $P^{-1} \times A \times P = L$.

Partie n^{0}2 — Commutant de la matrice A

L'objectif de cette question est de déterminer le *commutant* de la matrice A, c'est à dire l'ensemble des matrices $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telles que : $M \times A = A \times M$.

Pour toute matrice $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, on pose : $N = P^{-1} \times M \times P$.

3/ Montrer $[M \times A = A \times M] \Longleftrightarrow [N \times L = L \times N]$.

Pour $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, posons $N = P^{-1} \times M \times P$. On a alors : $M = P \times N \times P^{-1}$.

De manière analogue, puisque $P^{-1} \times A \times P = L$ d'après la question précédente, on a : $A = P \times L \times P^{-1}$.

Par suite : $[M \times A = A \times M] \Longleftrightarrow [P \times N \times P^{-1} \times P \times L \times P^{-1} = P \times L \times P^{-1} \times P \times N \times P^{-1}]$

$$\Longleftrightarrow [P \times N \times L \times P^{-1} = P \times L \times N \times P^{-1}] \Longleftrightarrow [N \times L = L \times N]$$

La dernière équivalence étant obtenue en multipliant à gauche (*resp.* à droite) les deux termes de l'avant-dernière égalité par P^{-1} (*resp.* par P).

Conclusion. $[M \times A = A \times M] \Longleftrightarrow [N \times L = L \times N]$ (où $N = P^{-1} \times M \times P$)

4/ Déterminer par le calcul l'ensemble des matrices $N \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $N \times L = L \times N$.

Soit $N \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. Il existe 9 réels a, b,..., i tels que : $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Avec cette notation, on a :

$$[N \times L = L \times N] \Longleftrightarrow \left[\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\right]$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{pmatrix} a & b & -c \\ d & e & -f \\ g & h & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix}\right] \Longleftrightarrow [c = f = g = h = 0]$$

En résumé : $N \times L = L \times N$ si et seulement si il existe 5 réels a, b, d, e et i tels que : $N = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$.

Conclusion. $\{N \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})\ ,\ N \times L = L \times N\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}\ ,\ a, b, d, e, i \text{ réels} \right\}$

5/ Déduire de ce qui précède qu'il existe 5 matrices $J_1, \ldots, J_5$ (que l'on ne demande pas de calculer) telles que :

$$[M \times A = A \times M] \Longleftrightarrow \left[\exists\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_5) \in \mathbb{R}^5,\ M = \sum_{k=1}^{5} \alpha_k J_k\right]$$

Soit $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. D'après la question 3 : $[M \times A = A \times M] \Longleftrightarrow [N \times L = L \times N]$ (avec $N = P^{-1} \times M \times P$).

Or, d'après la question précédente :

$[N \times L = L \times N] \Longleftrightarrow [\exists\, (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \in \mathbb{R}^5, \quad N = \alpha_1 E_{11} + \alpha_2 E_{12} + \alpha_3 E_{21} + \alpha_4 E_{22} + \alpha_5 E_{33}]$

où l'on a noté :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;\ E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;\ E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;\ E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } E_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que :

$$[M \times A = A \times M] \Longleftrightarrow \left[\exists\, (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \in \mathbb{R}^5,\ M = P \times (\alpha_1 E_{11} + \alpha_2 E_{12} + \alpha_3 E_{21} + \alpha_4 E_{22} + \alpha_5 E_{33}) \times P^{-1}\right]$$

Conclusion. $[M \times A = A \times M] \Longleftrightarrow \left[\exists\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_5) \in \mathbb{R}^5,\ M = \sum_{k=1}^{5} \alpha_k J_k\right]$,

avec $J_1 = P \times E_{11} \times P^{-1}, \ldots, J_5 = P \times E_{33} \times P^{-1}$

Partie n^{0}3 — Equations matricielles

Dans cette question, on pose :

$$B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Et on note par ailleurs les deux équations matricielles suivantes (d'inconnues $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ et $N \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ respectivement) :

$$(E1) : \quad M^T \times B \times M = B \qquad \text{et} \qquad (E2) : \quad N^T \times L \times N = L$$

6/ Calculer : $Q \times Q^T$. En déduire que Q est inversible, et expliciter Q^{-1}.

On a : $Q \times Q^T = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{9}\,\mathrm{diag}(9, 9, 9)$

Finalement : $Q \times Q^T = \mathrm{I}_3$. **Conclusion.** $Q \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, et : $Q^{-1} = Q^T$.

On admet dans la suite du problème que : $Q^{-1} \times B \times Q = L$.

7/ Soit $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

Etablir que M est solution de $(E1)$ si et seulement si $Q^{-1} \times M \times Q$ est solution de $(E2)$.

Soit M une matrice de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
& Q^{-1}MQ \text{ solution de (E2)} \\
\iff & Q^T \times M \times Q \text{ solution de (E2)} \\
\iff & \left(Q^T \times M \times Q\right)^T \times L \times \left(Q^T \times M \times Q\right) = L \\
\iff & Q^T \times M^T \times \left(Q^T\right)^T \times L \times Q^T \times M \times Q = L \\
\iff & Q^T \times M^T \times \underbrace{Q \times L \times Q^T}_{=QLQ^{-1}} \times M \times Q = L \\
\iff & Q^{-1} \times M^T \times B \times M \times Q = L \\
\iff & M^T \times B \times M = Q \times L \times Q^{-1} \\
\iff & M^T \times B \times M = B \\
\iff & M \text{ solution de (E1)}
\end{aligned}$$

Conclusion. $\forall M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, $[M \text{ solution de (E1)}] \iff [P^{-1}MP \text{ solution de (E2)}]$

8/ La suite de ce problème est consacrée à l'étude de l'ensemble des solutions de l'équation $(E2)$. On note G cet ensemble, c'est à dire :

$$G = \left\{M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) \text{ , } M^T \times L \times M = L\right\}$$

a/ Montrer que : $\forall (M, N) \in G^2, \quad M \times N \in G$.

Soient M et N deux éléments de G. Alors :

$$(MN)^T L (MN) = N^T \times \underbrace{M^T \times L \times M}_{=L \text{ car } M \in G} \times N = \underbrace{N^T \times L \times N}_{=L \text{ car } N \in G} = L$$

En résumé : $(MN)^T L (MN) = L$. D'où : $MN \in G$.

Conclusion. $\forall (M, N) \in G^2, \quad M \times N \in G$

b/ Soit $M \in G$. En remarquant que $L^2 = \mathrm{I}_3$, justifier que M est inversible, et exprimer son inverse en fonction de M et de L.

Soit $M \in G$. Alors : $M^T \times L \times M = L$. En multipliant à gauche les deux termes de cette égalité par L, on obtient : $L \times M^T \times L \times M = L^2$. Puisque $L^2 = \mathrm{I}_3$, on peut réécrire cette égalité : $\left(L \times M^T \times L\right) \times M = \mathrm{I}_3$.

Cette dernière signifie exactement que M est inversible, et que son inverse est : $L \times M^T \times L$.

Conclusion. $\forall M \in G$, $M \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $M^{-1} = L \times M^T \times L$.

c/ Déduire de la question précédente que : $[M \in G] \Longrightarrow [M^{-1} \in G]$.

Supposons que $M \in G$. D'après la question précédente, M est inversible, et : $M^{-1} = L \times M^T \times L$.

Or : ${}^t\left(L \times M^T \times L\right) \times L \times \left(L \times M^T \times L\right) = L \times M \times L \times L \times L \times M^T \times L = L \times M \times L \times M^T \times L$

$$= L \times \left(M^T \times L \times M\right)^T \times L = L \times L \times L = L$$

Dans la suite d'égalités précédentes, on a notamment utilisé le fait que L est symétrique (car diagonale), donc égale à sa transposée ; et que M est un élément de G (d'où : $M^T \times L \times M = L$) ; et enfin que $L^2 = \mathrm{I}_3$.

Finalement on a établi que : $\left(L \times M^T \times L\right)^T \times L \times \left(L \times M^T \times L\right) = L$, soit : $(M^{-1})^T \times L \times M^{-1} = L$.

En d'autres termes : $M^{-1} \in G$. **Conclusion**. $\forall M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})\,,\ [M \in G] \Longrightarrow [M^{-1} \in G]$

d/ Montrer que $(G, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_3(\mathbb{R}), \times)$.

Tout élément de G est inversible (question 8.b), donc $G \subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$; le produit de deux éléments de G est encore un élément de G (question 8.a) ; la matrice I_3 appartient à G (trivial) ; et l'inverse d'un élément de G est encore dans G (question 8.c).

Conclusion. $(G, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_3(\mathbb{R}), \times)$

Problème 2 — **(Calcul de $\zeta(2)$).**

Nous avons établi en début d'année (et au CB1) que lorsque l'on fait tendre n vers $+\infty$, la somme

$$S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

tend vers une limite finie. Cette limite finie est notée $\zeta(2)$, et l'objectif de ce problème est de déterminer sa valeur exacte.

Partie 1 : étude d'une fonction

On considère la fonction h définie sur $[0, \pi]$ par : $\forall t \in [0, \pi]\,,\ h(t) = \dfrac{t^2}{2\pi} - t$.

Et on définit une seconde fonction φ sur $[0, \pi]$ en posant :

$$\forall t \in [0, \pi]\,, \quad \varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{h(t)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{si } t \neq 0 \\ -1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1/ Quelle est la limite de $\dfrac{\sin(t)}{t}$ lorsque t tend vers 0 ? La réponse devra être justifiée.

On a : $\displaystyle\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{t + \varepsilon(t)}{t} = 1 + \varepsilon(t)$ avec $\displaystyle\lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$. **Conclusion.** $\displaystyle\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$

2/ Déduire de la question précédente les limites de $\dfrac{t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ puis de $\dfrac{h(t)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ lorsque t tend vers 0.

On commence par observer que d'après ce qui précède : $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} \dfrac{t}{\sin(t)} = 1$.

Puis, en procédant au changement de variable $T = t/2$, on obtient : $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} \dfrac{t}{2\sin(t/2)} = \lim\limits_{T\longrightarrow 0} \dfrac{T}{\sin(T)} = 1$.

Par ailleurs, pour tout t non nul : $\dfrac{h(t)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{t^2}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \dfrac{t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

On a déjà vu que : $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} \dfrac{t}{2\sin(t/2)} = 1$ d'où $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} \dfrac{t^2}{2\sin(t/2)} = 0$.

Conclusion. $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} \dfrac{h(t)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = -1$.

Partie 2 : sommes et intégrales

3/ Montrer que pour tout entier naturel k, on a : $\cos(k\pi) = (-1)^k$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On a : $\cos(k\pi) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi}\right) = \mathrm{Re}\left[\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\right)^k\right] = \Re\left[(-1)^k\right]$.

Conclusion. $\forall\, k \in \mathbb{N},\ \cos(k\pi) = (-1)^k$

4/ A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^\pi t\cos(kt)\ \mathrm{d}t = \frac{(-1)^k - 1}{k^2}$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose : $\begin{cases} u(t) = t \\ v(t) = \dfrac{\sin(kt)}{k} \end{cases}$ d'où : $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v'(t) = \cos(kt) \end{cases}$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi]$, et on peut donc utiliser une intégration par parties pour obtenir :

$$\int_0^\pi t\cos(kt)\ \mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{t\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi}_{=0} - \frac{1}{k}\int_0^\pi \sin(kt)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}\left[\cos(kt)\right]_0^\pi = \frac{\cos(k\pi) - 1}{k^2}$$

Conclusion. $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_0^\pi t\cos(kt)\ \mathrm{d}t = \frac{(-1)^k - 1}{k^2}$

5/ Etablir que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^{\pi} t^2 \cos(kt)\ \mathrm{d}t = \frac{2\pi\,(-1)^k}{k^2}$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose : $\left\{\begin{array}{l} u(t) = t^2 \\ v(t) = \dfrac{\sin(kt)}{k} \end{array}\right.$ d'où : $\left\{\begin{array}{l} u'(t) = 2t \\ v'(t) = \cos(kt) \end{array}\right.$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$, et on peut donc utiliser une intégration par parties pour obtenir :

$$\int_0^{\pi} t^2 \cos(kt)\ \mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{t^2 \sin(kt)}{k}\right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{k} \underbrace{\int_0^{\pi} t \sin(kt)\ \mathrm{d}t}_{=J_k} \qquad (\spadesuit)$$

Calculons J_k. On pose : $\left\{\begin{array}{l} U(t) = t \\ V(t) = -\dfrac{\cos(kt)}{k} \end{array}\right.$ d'où : $\left\{\begin{array}{l} U'(t) = 1 \\ V'(t) = \sin(kt) \end{array}\right.$

Les fonctions U et V sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$, et on peut donc utiliser une intégration par parties pour obtenir :

$$J_k = \int_0^{\pi} t \sin(kt)\ \mathrm{d}t = \left[-\frac{t\cos(kt)}{k}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{\pi} \cos(kt)\ \mathrm{d}t = -\frac{\pi\cos(k\pi)}{k} + \frac{1}{k^2}\underbrace{[\sin(kt)]_0^{\pi}}_{=0}$$

$$= -\frac{\pi\,(-1)^k}{k} + \frac{1}{k^2} \qquad (\clubsuit)$$

Conclusion. On déduit de $(\spadesuit)$ et de $(\clubsuit)$ que : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_0^{\pi} t^2 \cos(kt)\ \mathrm{d}t = \frac{2\pi\,(-1)^k}{k^2}$

6/ Pour tout entier naturel k non nul, on pose :

$$I_k = \int_0^{\pi} h(t)\cos(kt)\ \mathrm{d}t$$

Déduire de ce qui précède l'expression de I_k en fonction de k.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$I_k = \int_0^{\pi} h(t)\cos(kt)\ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} t^2\cos(kt)\ \mathrm{d}t - \int_0^{\pi} t\cos(kt)\ \mathrm{d}t$$

$$= \frac{(-1)^k}{k^2} - \frac{(-1)^k - 1}{k^2} = \frac{1}{k^2}$$

Conclusion. $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ I_k = \displaystyle\int_0^{\pi} h(t)\cos(kt)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}$

7/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\forall t \in \ ]0, \pi], \quad \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \cos\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)t\right) \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Soient $t \in \ ]0;\pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Observons que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \mathrm{Re}\left(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \exp^{\mathrm{i}kt}}_{S}\right)$, et calculons S.

$S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \exp^{\mathrm{i}kt} = \sum_{k=1}^{n} \left(\exp^{\mathrm{i}t}\right)^k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}$ (puisque $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \neq 1$). Puis on applique la technique de l'angle moitié :

$S = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt/2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t/2}} \dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt/2}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t/2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{n+1}{2}\,t} \dfrac{-2\mathrm{i}\sin(nt/2)}{-2\mathrm{i}\sin(t/2)}$ d'où : $S = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{n+1}{2}\,t} \dfrac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}$

Conclusion. $\forall t \in \ ]0;\pi]\,,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \cos\left(\frac{n+1}{2}\,t\right) \frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}$

8/ Déduire de la question précédente l'existence d'un réel λ tel que :

$$\forall t \in \ ]0, \pi], \quad \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \lambda$$

Soient $t \in \ ]0;\pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\cos\left(\frac{n+1}{2}\,t\right)\sin\left(\frac{nt}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{nt}{2} + \frac{n+1}{2}\,t\right) + \sin\left(\frac{nt}{2} - \frac{n+1}{2}\,t\right)}{2} = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right) + \sin\left(-\frac{t}{2}\right)}{2}$$

$$= \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2}$$

Conclusion. De cette identité et de la question précédente, on déduit que :

$$\forall t \in \ ]0;\pi]\,,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin(t/2)} - \frac{1}{2} \qquad (\text{d'où } \lambda = \frac{1}{2})$$

Partie 3 : épilogue

On admet que :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_0^{\pi} \varphi(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right) \mathrm{d}t \right) = 0$$

9/ Etablir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \int_0^{\pi} h(t) \left(\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) \right) \mathrm{d}t$$

D'après la question 6, on a : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\int_0^{\pi} h(t) \cos(kt)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}$

En sommant les égalités obtenues en faisant varier k de 1 à n (avec $n \in \mathbb{N}^*$) dans la relation ci-dessus, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} h(t) \cos(kt)\ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} h(t) \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)\ \mathrm{d}t$$

la deuxième égalité provenant de la linéarité de l'intégrale.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \int_0^{\pi} h(t) \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)\ \mathrm{d}t$

10/ Déduire de ce qui précède la valeur exacte de :

$$\zeta(2) = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \int_0^{\pi} h(t) \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)\ \mathrm{d}t$$

Et d'après la question 8 : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \int_0^{\pi} h(t) \left(\frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right)}{2 \sin(t/2)} - \frac{1}{2} \right) \mathrm{d}t$

D'où : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \int_0^{\pi} \frac{h(t)}{2 \sin(t/2)} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right) \mathrm{d}t - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} h(t)\, \mathrm{d}t$

Soit : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \int_0^{\pi} \varphi(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right) \mathrm{d}t - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} h(t)\, \mathrm{d}t \quad (✾)$

D'après l'énoncé : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi} \varphi(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right) \mathrm{d}t = 0$

On déduit de cette observation et de la relation (✾) que : $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi} h(t)\,\mathrm{d}t \quad$ (❀)

Il reste à calculer : $\displaystyle I = \int_0^{\pi} h(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{t^2}{2\pi} - t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6\pi}\left[t^3\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2}\left[t^2\right]_0^{\pi} = -\frac{\pi^2}{3}$

On déduit finalement de ce calcul et de (❀) que :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right) = \frac{\pi^2}{6}} \qquad \text{c'est à dire} \qquad \boxed{\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}}$$