Colle 17 – Questions de cours

Question de cours 1. — Propriété (clef du théorème de Rolle). Soit f une fonction dérivable sur I (intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$), et soit $c \in I$. Si f admet un extremum local en c, alors $f'(c) = 0$.

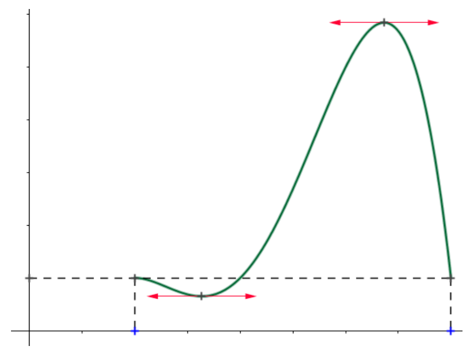
Preuve. Puisque f admet un extremum local en c, il existe un voisinage ouvert de c tel que $f(c)$ soit un extremum de f sur ce voisinage. De plus, f étant dérivable en c, on a :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Or, sur un voisinage ouvert de c, l'expression $\dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$ possède des signes opposés suivant que h est strictement positif ou strictement négatif. Par stabilité des inégalités large par passage à la limite, on en déduit que : $\displaystyle\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ et $\displaystyle\lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ sont de signes opposés. Par conséquent : $f'(c) = 0$.

Conclusion. Si f admet un extremum local en c, alors $f'(c) = 0$

Remarque. *La réciproque est fausse ($f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^3$ s'annule en 0, mais 0 n'est pas un extremum local), et l'énoncé n'est plus valide sur segment ($f : x \in [0,1] \longmapsto x^3$ admet un maximum en 1, mais $f'(1) \neq 0$).*



Question de cours 2. — Théorème de Rolle. Si est dérivable sur $]a;b[$, continue sur $[a,b]$, et $f(a) = f(b)$, alors : $\exists\, c \in \,]\,a; b\,[\;,\; f'(c) = 0$.

Preuve. La fonction f étant continue sur le segment $[a,b]$, elle est bornée et atteint ses bornes sur $[a,b]$ (théorème des bornes atteintes). Notons m son minimum et M son maximum.

➤ Si $m = M$: alors f est constante sur $[a,b]$. Par suite : $\forall\, c \in \,]a,b[,\; f'(c) = 0$.

➤ Si $m < M$: distinguons alors deux sous-cas : soit $f(a) = m$, soit $f(a) \neq m$.

- ➢ Si $f(a) = m$: alors on a aussi $f(b) = m$ (par hypothèse), donc le maximum M de f est atteint en un réel c de $]a,b[$ (puisque $m \neq M$), et on a donc $f'(c) = 0$.
- ➢ Si $f(a) \neq m$: alors on a aussi $f(b) \neq m$ (par hypothèse), donc le minimum m de f est atteint en un réel c de $]a,b[$, et on a donc $f'(c) = 0$.

Conclusion. Dans tous les cas : $\exists\, c \in \,]\,a; b\,[\;,\; f'(c) = 0$.

Question de cours 3. — Exercice. Etablir que : $\forall\, x \in \,]\,0; 1\,[,\; \sqrt{1-x^2}\,\arcsin(x) < x$.

Soit x un réel tel que $0 < x < 1$. La fonction arcsin est continue sur $[0,x]$, et dérivable sur $]0,x[$: on peut donc lui appliquer le théorème des accroissements finis pour affirmer que :

$$\exists\, c \in]0,x[,\; \frac{\arcsin(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}$$

D'où : $\exists\, c \in]0,x[,\; \sqrt{1-c^2}\arcsin(x) = x$. Or : $\sqrt{1-c^2} > \sqrt{1-x^2}$ (puisque $0 < c < x$).

Conclusion. $\forall\, x \in \,]0,1[,\; \sqrt{1-x^2}\arcsin(x) < x$

Question de cours 4. — **Exercice.** Etablir que : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ \arctan(x) \leqslant x$.

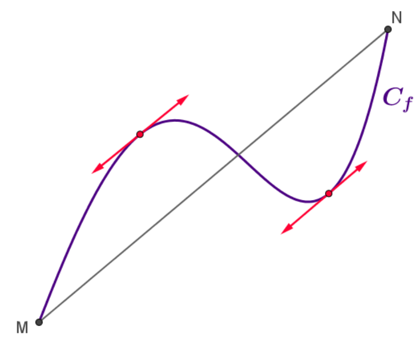
Pour $x = 0$, l'inégalité est triviale.

Soit x un réel strictement positif. La fonction arctan est continue sur $[0, x]$, et dérivable sur $]0, x[$: on peut donc lui appliquer le théorème des accroissements finis pour affirmer que :

$$\exists\, c \in]0, x[,\ \frac{\arctan(x)}{x} = \frac{1}{1+c^2}$$

D'où : $\dfrac{\arctan(x)}{x} \leqslant 1$ (puisque $\dfrac{1}{1+c^2} \leqslant 1$).

Conclusion. $\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ \arctan(x) \leqslant x$



Question de cours 5. — **Théorème des accroissements finis.** Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur $]a, b[$, continue sur $[a; b]$, alors : $\exists\, c \in\ ]\, a; b\, [\ ,\ f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Preuve. On définit une fonction g sur $[a, b]$ en posant :

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a)$$

D'après les théorèmes généraux sur la continuité et la dérivabilité respectivement, la fonction g * est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

En outre $g(a) = f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(a - a)$ d'où $g(a) = f(a)$; et $g(b) = f(b) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(b - a)$ d'où : $g(b) = f(a)$.

La fonction g vérifie les hypothèses du théorème de Rolle, dont l'application donne : $\exists\, c \in]a, b[,\ g'(c) = 0$.

Or : $\forall\, x \in]a, b[,\ g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

On en déduit : $\exists\, c \in]a, b[,\ f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$. D'où finalement : $\boxed{\exists\, c \in]a, b[,\ f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}}$.

Question de cours 6. — **Propriété.** Soit $f \in \mathbb{R}^I$, une fonction dérivable sur I. La fonction f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I.

Preuve. ➤ ($\Longrightarrow$) — Supposons f croissante sur I.

Soit a un réel de l'intervalle I. Puisque f est dérivable sur I, elle l'est en particulier en a, et : $f'(a) = {f'}_d(a)$. En d'autres termes : $f'(a) = \displaystyle\lim_{h \overset{>}{\longrightarrow} 0} \frac{f\,(a+h) - f\,(a)}{h}$.

Or, pour tout réel $h > 0$: $f(a + h) - f(a) \geqslant 0$ (puisque f est supposée croissante).

Donc : $\forall\, h > 0,\ \dfrac{f\,(a+h) - f\,(a)}{h} \geqslant 0$.

Par stabilité des inégalités larges par passage à la limite, on en déduit que : $\displaystyle\lim_{h \overset{>}{\longrightarrow} 0} \frac{f\,(a+h) - f\,(a)}{h} \geqslant 0$, d'où ${f'}_d(a) \geqslant 0$ d'où $f'(a) \geqslant 0$.

Le réel a de I étant arbitraire dans le raisonnement ci-dessus, on peut conclure que : $\forall\, a \in I,\ f'(a) \geqslant 0$. En d'autres termes, f' est positive sur I. On a donc : $\boxed{[f \text{ croissante sur } I] \Longrightarrow [f' \text{ positive sur } I]}$

*. Informellement, cette fonction g est destinée à "redresser la situation", en ôtant à f ce qui l'empêche de prendre les mêmes valeurs en a et en b ; la motivation étant de se ramener à la situation du théorème de Rolle.

➤ ($\Longleftarrow$) — Réciproquement, supposons f' positive sur I.

Soient a et b deux réels dans I, avec $a < b$. Puisque f est dérivable sur I, on peut lui appliquer le théorème des accroissements finis † sur $[a;b]$ et affirmer que :

$$\exists\, c \in \,]\,a;b\,[\,, \quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{d'où :} \quad \exists\, c \in \,]\,a;b\,[\,, \quad f(b)-f(a) = f'(c)\times(b-a)$$

Comme $f'(c)$ est positif par hypothèse, et que par ailleurs $b \geqslant a$ toujours par hypothèse, on en déduit que $f(b)-f(a) \geqslant 0$.
En résumé, on a établi l'implication : $[b > a] \Longrightarrow [f(b) \geqslant f(a)]$. Donc f est croissante sur I.

On a donc : $\boxed{[f' \text{ positive sur } I] \Longrightarrow [f \text{ croissante sur } I]}$

Conclusion. Pour f dérivable sur I, on a : $[f'$ positive sur $I] \Longleftrightarrow [f$ croissante sur $I]$.

Question de cours 7. — **Propriété**. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. La fonction f est lipschitzienne sur I SSI f' est bornée sur I.

Preuve. ➤ Supposons f lipschitzienne sur I. Alors il existe un réel positif k tel que : $\forall\,(x,y) \in I^2,\ |f(y)-f(x)| \leqslant k\,|y-x|$. Soit a un réel quelconque dans I. Pour tout réel h raisonnable ‡, on a :

$$\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right| \leqslant \frac{k\,|h|}{|h|} \qquad \text{d'où :} \qquad \left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right| \leqslant k$$

Par stabilité des inégalités larges par passage à la limite, on en déduit que :

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right| \leqslant k \qquad \text{d'où :} \qquad |f'(a)| \leqslant k$$

Le réel $a \in I$ étant arbitraire dans le raisonnement précédent, on a établi que : $\forall\, a \in I,\ |f'(a)| \leqslant k$. Ce qui signifie que f' est bornée sur I.

Par suite : $[f$ lipschitzienne sur $I] \Longrightarrow [f'$ bornée sur $I]$ $(\spadesuit)$.

➤ Réciproquement, supposons f' bornée sur I. Il existe un réel M tel que : $|f'| \leqslant M$ sur I.

Soient x et y deux réels distincts dans I. La fonction f étant dérivable sur I, elle est continue sur le segment $[x,y]$ (ou sur le segment $[y,x]$), et dérivable sur l'intervalle $]\,x,y\,[$ (ou sur l'intervalle $]\,y,x\,[$). On peut donc appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction f entre x et y :

il existe un réel c compris entre x et y tel que : $f(y)-f(x) = f'(c)\times(y-x)$

$\Longrightarrow$ il existe un réel c compris entre x et y tel que : $|f(y)-f(x)| = |f'(c)|\times|y-x|$

$\Longrightarrow$ il existe un réel c compris entre x et y tel que : $|f(y)-f(x)| \leqslant M\times|y-x|$

L'inégalité obtenue ci-dessus restant évidemment valide dans le cas particulier où $x = y$, on peut conclure que : $\forall\,(x,y) \in I^2,\ |f(y)-f(x)| \leqslant M\,|y-x|$. Ce qui signifie que f est M-lipschitzienne sur I.

Par suite : $[f$ lipschitzienne sur $I] \Longleftarrow [f'$ bornée sur $I]$ $(\clubsuit)$.

➤ **Conclusion**. D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$: $[f$ lipschitzienne sur $I] \Longleftrightarrow [f'$ bornée sur $I]$

Question de cours 8. — **Inégalité des accroissements finis**. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I, et s'il existe un réel K tel que $|f'| \leqslant K$ sur I, alors : $\forall\,(a,b) \in I^2,\ |f(b)-f(a)| \leqslant K\,|b-a|$.

Dans le cas où $a = b$, l'énoncé est trivial.

Supposons a et b distincts. Sous les hypothèses de l'énoncé, il existe un réel c compris entre a et b tel que :

$$f(b)-f(a) = f'(c)\times(b-a)$$

Le passage aux valeurs absolues et la majoration $|f'| \leqslant K$ fournissent la conclusion.

†. Puisqu'en particulier f est dérivable sur $]a,b[$ et continue sur $[a,b]$.

‡. C'est à dire non nul et tel que $(a+h) \in I$.