

PROBLÈME DE FÉVRIER

EXERCICE 1 — UNE FONCTION CONTINUE SUR $\mathbb{R}$, NON DÉRIVABLE EN UNE INFINITÉ DE POINTS

On considère la fonction ω définie sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \omega(x) = \min_{n \in \mathbb{Z}} |x - n|$$

Pour tout réel x , $\omega(x)$ est donc la distance entre x et l'entier relatif le plus proche de x .

1/ Question préliminaire. Etablir que pour tout réel x , on a : $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.

Soit x un réel. On a : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. D'où : $\lfloor x \rfloor + 1 \leq x + 1 < \lfloor x \rfloor + 2$.

On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.¹

2/ Etablir que : $\forall x \in \mathbb{R}, \omega(x) = \min(x - \lfloor x \rfloor, \lfloor x + 1 \rfloor - x)$.

Soit x un nombre réel. On a : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. Le réel x appartient donc à un unique intervalle d'entiers relatifs, dont les bornes sont $\lfloor x \rfloor$ et $(\lfloor x \rfloor + 1)$. Pour tout entier relatif n distinct de ces deux bornes, on a : $|x - n| \geq 1$. Il s'ensuit que la plus petite distance entre x et un entier relatif est donc l'une des distances entre x et l'une des bornes de l'intervalle $[\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1]$.

En d'autres termes : $\omega(x) = \min(x - \lfloor x \rfloor, \lfloor x + 1 \rfloor - x)$.

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R}, \omega(x) = \min(x - \lfloor x \rfloor, \lfloor x + 1 \rfloor - x)$.

3/ Montrer que la fonction ω est 1-périodique, et paire.

Soit x un nombre réel.

D'après la question précédente : $\omega(x + 1) = \min(x + 1 - \lfloor x + 1 \rfloor, \lfloor x + 1 + 1 \rfloor - (x + 1))$

D'après la question 1, on a donc : $\omega(x + 1) = \min(x + 1 - \lfloor x \rfloor - 1, \lfloor x + 1 \rfloor + 1 - x - 1)$. Par suite : $\omega(x + 1) = \omega(x)$.

Le réel x étant arbitraire dans le raisonnement précédent, on peut conclure : $\forall x \in \mathbb{R}, \omega(x + 1) = \omega(x)$. La fonction ω est donc 1-périodique.

Soit x un réel positif. On a : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. On en déduit que : $-\lfloor x \rfloor - 1 < -x \leq -\lfloor x \rfloor$.

On distingue alors deux cas, suivant que x est entier ou non.

Si x est entier, alors $x = \lfloor x \rfloor$ et $-x = -\lfloor x \rfloor$.

Sinon, lorsque x n'est pas entier, on déduit de ce qui précède que : $-\lfloor x \rfloor - 1 < -x < -\lfloor x \rfloor$ (inégalité stricte à droite), d'où a fortiori : $-\lfloor x \rfloor - 1 \leq -x < -\lfloor x \rfloor$.

1. En effet, le point-clef est de se souvenir que la partie entière d'un réel x est l'unique entier relatif tel que : $N \leq x < N + 1$. L'encadrement $\lfloor x \rfloor + 1 \leq x + 1 < \lfloor x \rfloor + 2$, autrement écrit $\lfloor x \rfloor + 1 \leq x + 1 < (\lfloor x \rfloor + 1) + 1$ signifie que $\lfloor x \rfloor + 1$ est l'unique entier relatif N tel que $N \leq x + 1 < N + 1$. A ce titre, c'est la partie entière de $x + 1$.

On en déduit dans ce cas que : $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$.

$$\text{En résumé : } \forall x \in \mathbb{R}_+, \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} -\lfloor x \rfloor & \text{si } x \in \mathbb{N} \\ -\lfloor x \rfloor - 1 & \text{si } x \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N} \end{cases}$$

Cette observation faite, on peut enfin étudier la parité de ω (qui est effectivement définie sur une partie symétrique par rapport à zéro).

Soit x un réel positif. D'après la question 2 : $\omega(-x) = \min(-x - \lfloor -x \rfloor, \lfloor -x + 1 \rfloor + x)$.

Lorsque x est entier, $-x$ l'est également, et on a donc $\omega(x) = 0$.

Supposons donc que $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$. D'après la question précédente et la question 1, on a :

$$\omega(-x) = \min(-x + \lfloor x \rfloor + 1, -\lfloor x \rfloor + x) = \min(x - \lfloor x \rfloor, \lfloor x + 1 \rfloor - x) = \omega(x)$$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \omega(-x) = \omega(x)$. Ce qui assure que la fonction ω est paire.

4/ Déterminer l'expression de $\omega(x)$ pour tout réel x de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

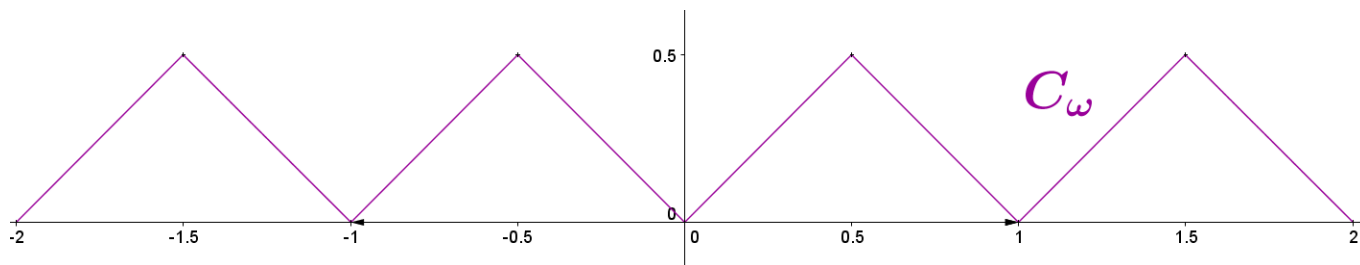
Pour tout réel $x \in [0, 1/2]$, l'entier le plus proche de x est 0. D'où : $\omega(x) = x - 0 = x$.

Pour tout réel $x \in [-1/2, 0]$, l'entier le plus proche de x est 0. D'où : $\omega(x) = 0 - x = -x$.

Conclusion. $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \omega(x) = |x|$.

5/ Tracer la courbe représentative de ω sur $[-2, 2]$.

On connaît la courbe représentative de la fonction valeur absolue sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, c'est à dire que l'on connaît la courbe représentative de la fonction ω sur un intervalle de longueur égale à une période. On obtient alors la courbe représentative de ω sur $[-2, 2]$ en utilisant la 1-périodicité (et éventuellement la parité) de la fonction ω .



6/ Etablir que ω est continue en 0 et en $\frac{1}{2}$. En déduire que ω est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction valeur absolue est continue en 0; on en déduit que ω l'est aussi, puisque les fonctions ω et valeur absolue coïncident sur $[-1/2, 1/2]$.

De plus, il est immédiat que : $\lim_{x \rightarrow 1/2^-} \omega(x) = \frac{1}{2}$. Par ailleurs : $\lim_{x \rightarrow 1/2^+} \omega(x) = \lim_{x \rightarrow 1/2^+} (1 - x) = \frac{1}{2}$.

Il s'ensuit que : $\lim_{x \rightarrow 1/2^+} \omega(x) = \omega(1/2) = \lim_{x \rightarrow 1/2^-} \omega(x)$. Ce qui signifie que la fonction ω est continue en $1/2$.

Conclusion. La fonction ω est continue en 0 et en $1/2$.

Puisque la fonction ω est affine sur chacun des intervalles $]0, 1/2[$ et $]1/2, 1[$, on en déduit que ω est continue sur $[0, 1[$.

La fonction ω étant de surcroît 1-périodique, on peut enfin conclure qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. La fonction ω est continue sur $\mathbb{R}$.

7/ Etablir que ω est non dérivable en tout réel s'écrivant $\frac{1}{2}k$, pour k entier relatif quelconque.

La fonction ω n'est pas dérivable en 0 (puisque la fonction valeur absolue ne l'est pas). Par 1-périodicité, on en déduit que ω n'est dérivable en aucun $k \in \mathbb{Z}$.

De plus, la fonction ω n'est pas dérivable en $1/2$, puisqu'elle admet des nombres dérivés à gauche et à droite de $1/2$ qui sont distincts (1 à gauche, et -1 à droite). Par 1-périodicité, on en déduit que ω n'est dérivable en aucun réel s'écrivant $\frac{1}{2} + k$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Conclusion. La fonction ω n'est dérivable en aucun réel s'écrivant $\frac{k}{2}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

En résumé, la fonction ω est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier, mais est non dérivable en une infinité de réels. C'est un exemple de fonction à ranger dans la catégorie des fonctions “un peu étranges” de l'Analyse.

Remarque : cette fonction ω est l'élément de base pour la construction d'une fonction vraiment “très étrange” : la fonction de Van Der Waerden, qui est continue sur $\mathbb{R}$, mais dérivable en aucun réel !

EXERCICE 2 — Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on note $T(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$. On considère l'ensemble S défini par

$$S = \{T(a, b, c) \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$$

On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1) Montrer que S est un sous-groupe de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On vérifie sans peine que S est une partie de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ contenant la matrice nulle, stable par somme et par passage à l'opposée. Ainsi : S est un sous-groupe de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2) Exprimer A^2, B^2, AB et BA à l'aide de I, A et B .

Après calculs : $A^2 = I + B; \quad B^2 = I; \quad AB = BA = A$

3) Soient (a, b, c) et (a', b', c') dans $\mathbb{R}^3$, $M = T(a, b, c)$ et $M' = T(a', b', c')$. Calculer le produit MM' .

Soient (a, b, c) et (a', b', c') dans $\mathbb{R}^3$, $M = T(a, b, c)$ et $M' = T(a', b', c')$. Alors : $M = aI + bA + cB$ et $M' = a'I + b'A + c'B$.

On en déduit que : $MM' = aa'I + ab'A + ac'B + ba'A + bb'A^2 + bc'AB + ca'B + cb'BA + cc'B^2$.

D'après la question précédente : $MM' = aa'I + ab'A + ac'B + ba'A + bb'(I + B) + bc'A + ca'B + cb'A + cc'I = (aa' + bb' + cc')I + (ab' + ba' + bc' + cb')A + (ac' + bb' + ca')$

Conclusion. $T(a, b, c)T(a', b', c') = T(aa' + bb' + cc', ab' + ba' + bc' + cb', ac' + bb' + ca')$

4) Montrer que S est un sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Est-il commutatif?

S est un sous-groupe additif de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (question 1), contenant l'identité (immédiat), et stable par produit (question précédente). Par suite : S est un sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5) L'anneau S est-il un corps ?

L'anneau S contient la matrice A , qui n'est pas nulle, mais qui n'est pas inversible non plus (deux de ses colonnes sont égales). Donc S n'est pas un corps.

PROBLÈME 1 — (CONVERGENCE DES SÉRIES DE RIEMANN).

Soit α un nombre réel. On définit une suite $(u_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ en posant :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad u_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha}$$

Le but de l'exercice est d'étudier la limite de la suite (u_N) en fonction des valeurs de α .

PARTIE A - Quelques cas particuliers

- 1) Soit N un entier naturel non nul. Calculer u_N lorsque $\alpha = 0$. En déduire la limite de (u_N) dans ce cas.
- 2) Soit N un entier naturel non nul.

a) Rappeler les formules donnant $A_N = \sum_{n=1}^N n$, $B_N = \sum_{n=1}^N n^2$ et $C_N = \sum_{n=1}^N n^3$.

b) Déduire de la question précédente la limite de la suite (u_N) dans les cas où $\alpha = -1$, $\alpha = -2$ et $\alpha = -3$.

3) Rappeler l'énoncé du théorème des accroissements finis.

Puis appliquer ce théorème à la fonction $\ln$ (logarithme népérien) sur l'intervalle $[N; N + 1]$.

4) Etablir que : $\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{N} \geq \ln(N + 1) - \ln(N)$. En déduire la limite de la suite (u_N) dans le cas où $\alpha = 1$.

PARTIE B - Généralisation - le cas α strictement négatif

Dans cette partie, on suppose : $\alpha < 0$.

1) Montrer que $\lim_{N \rightarrow +\infty} N^\alpha = 0$.

2) En déduire la limite de (u_N) dans le cas où $\alpha < 0$.

PARTIE C - Généralisation - le cas α strictement positif

Dans cette partie, on suppose $\alpha > 0$ et $\alpha \neq 1$.

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = x^{1-\alpha}$.

Justifier brièvement que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, calculer sa dérivée, et donner son sens de variation.

2) Soit n un entier naturel non nul. Etablir que :

$$\exists c \in]n; n + 1[, \quad \frac{1}{c^\alpha} = \frac{(n + 1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}}{1 - \alpha}$$

3) Dans cette question, on suppose $0 < \alpha < 1$.

a) Soit n un entier naturel non nul. Déduire de la question précédente que : $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{(n + 1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}}{1 - \alpha}$

b) Etablir alors que : $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{1 - \alpha} [(N + 1)^{1-\alpha} - 1]$

c) En déduire la limite de (u_N) dans le cas où $0 < \alpha < 1$.

4) Dans cette question, on suppose que $\alpha > 1$. Prouver que (u_N) est convergente.

PARTIE D - Synthèse

A l'aide des résultats établis dans les parties précédentes, indiquer pour quelles valeurs du réel α la suite (u_N) a une limite infinie, et pour quelles valeurs de α elle possède une limite finie.

PARTIE A - Quelques cas particuliers.

1) Dans le cas où $\alpha = 0$, on a : $\forall N \in \mathbb{N}^*, u_N = \sum_{n=1}^N 1 \Rightarrow \boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*, u_N = N + 1}$. D'où : $\boxed{\lim_{N \rightarrow +\infty} u_N = +\infty}$.

2) a) $\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^N n = \frac{N(N+1)}{2}; \sum_{n=1}^N n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \text{ et } \sum_{n=1}^N n^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4}}$.

b) Dans le cas où $\alpha = -1$ on a : $\forall N \in \mathbb{N}^*, u_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{-1}} = \sum_{n=1}^N n = \frac{N(N+1)}{2}$ d'où $\boxed{\lim_{N \rightarrow +\infty} u_N = +\infty}$.

Pour des raisons analogues (voir a), on aboutit au même résultat dans les cas où $\alpha = -2$ et $\alpha = -3$.

Conclusion : pour $\alpha = -1, \alpha = -2$ et $\alpha = -3$ on a $\lim_{N \rightarrow +\infty} u_N = +\infty$.

3) $\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{N} \geq \ln(N+1) - \ln(N)}$.² Par conséquent : $\forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \geq \ln(N+1)$, et d'après le

théorème de comparaison on en déduit que : $\boxed{\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = +\infty}$.

PARTIE B - Généralisation - le cas α strictement négatif

1) Pour tout N entier naturel non nul, on a : $N^\alpha = e^{\alpha \ln N}$. Or $\lim_{N \rightarrow +\infty} \alpha \ln N = -\infty$ puisque α est strictement négatif par hypothèse. D'où : $\boxed{\lim_{N \rightarrow +\infty} N^\alpha = 0}$.

2) Pour tout entier naturel N non nul, on a : $u_N \geq \frac{1}{N^\alpha}$. Or $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N^\alpha} = +\infty$ d'après la question précédente, et le théorème de comparaison permet alors d'affirmer que : $\lim_{N \rightarrow +\infty} u_N = +\infty$.

Conclusion : pour $\alpha < 0$ on a $\lim_{N \rightarrow +\infty} u_N = +\infty$.

PARTIE C - Généralisation - le cas α strictement positif Dans cette partie, on suppose $\alpha > 0$ et $\alpha \neq 1$.

1) La fonction $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto e^{(1-\alpha) \ln x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que composée de fonctions qui le sont, et sa dérivée est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{1-\alpha}{x} e^{(1-\alpha) \ln x} = \frac{1-\alpha}{x} x^{1-\alpha} = \frac{1-\alpha}{x^\alpha}.$$

Il s'ensuit que le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est exactement celui de $1-\alpha$. Par suite :

$\boxed{\text{Si } 0 < \alpha < 1, \text{ alors } f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^*; \text{ et si } \alpha > 1, \text{ alors } f \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+^*}$.

2) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question précédente, donc elle l'est en particulier sur l'intervalle $[n; n+1]$ pour tout entier naturel non nul n . On peut donc appliquer le théorème des accroissements finis à f sur $[n; n+1]$, et ce faisant on obtient :

$$\exists c \in]n; n+1[, \quad \frac{1-\alpha}{c^\alpha} = \frac{(n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}}{(n+1) - n} \iff \boxed{\exists c \in]n; n+1[, \quad \frac{1}{c^\alpha} = \frac{(n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \quad (\spadesuit)$$

2. Voir cours, application du théorème des accroissements finis à la fonction $\ln$ entre N et $N+1$.

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $c \in]n; n+1[$, on a : $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{c^\alpha} \geq \frac{1}{(n+1)^\alpha}$ puisque la fonction puissance $x \mapsto 1/x^\alpha$ est décroissante quand α est strictement positif. En ne conservant que l'inégalité de gauche de cet encadrement, et en utilisant la relation ($\spadesuit$), on obtient :

$$\forall \alpha \in]0; 1[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{(n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

b) D'après ce qui précède : $\forall \alpha \in]0; 1[, \forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{1-\alpha} \sum_{n=0}^N ((n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha})$, c'est-à-dire,

la somme de droite étant télescopique : $\forall \alpha \in]0; 1[, \forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{1-\alpha} ((N+1)^{1-\alpha} - 1)$

c) Dans le cas où $0 < \alpha < 1$, on a : $\lim_{N \rightarrow +\infty} (N+1)^{1-\alpha} = +\infty$, d'où : $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} ((N+1)^{1-\alpha} - 1) = +\infty$. On déduit de cette limite, de l'inégalité de la question précédente et du théorème de comparaison que :

$$\forall \alpha \in]0; 1[, \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$$

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $c \in]n; n+1[$, on a : $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{c^\alpha} \geq \frac{1}{(n+1)^\alpha}$.³ On en déduit dans un premier temps que :

$$\forall \alpha \in]1; +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \frac{(n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

$$\text{d'où : } \forall \alpha \in]1; +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \frac{n^{1-\alpha} - (n+1)^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$$

$$\text{et donc : } \forall \alpha \in]1; +\infty[, \forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \sum_{n=1}^N \frac{n^{1-\alpha} - (n+1)^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$$

$$\text{soit : } \forall \alpha \in]1; +\infty[, \forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha - 1} (1 - (N+1)^{1-\alpha})$$

Or on a cette fois, puisque $\alpha > 1$: $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha - 1} (1 - (N+1)^{1-\alpha}) = \frac{1}{\alpha - 1}$.

On en déduit que la suite de terme général $\sum_{n=1}^N \frac{1}{(n+1)^\alpha}$ converge puisqu'elle est croissante⁴ et majorée (nous venons de l'établir).

Il ne reste plus qu'à remarquer que : $\forall N \in \mathbb{N}^*, u_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} = \left[\sum_{n=1}^N \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right] + 1 - \frac{1}{(N+1)^\alpha}$, ce qui assure que la suite de terme général u_N converge en tant que somme de suites convergentes. On peut même préciser, grâce à cette égalité que sa limite est comprise entre 1 et $1 + (\alpha - 1)^{-1}$.

3. Même début qu'à la question 3-a).

4. C'est une somme de termes positifs!

Conclusion : pour $\alpha > 1$, (u_N) converge et $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} = \ell$ (avec $1 \leq \ell \leq 1 + \frac{1}{\alpha - 1}$).

PARTIE D - Synthèse En résumé, on a établi au cours des parties précédentes que :

- Si $\alpha \leq 1$: $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \right) = +\infty$
- Si $\alpha > 1$: $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \right) = \ell$ (avec $1 \leq \ell \leq 1 + \frac{1}{\alpha - 1}$)