Devoir surveillé de Mathématiques n^{0}8 — 4 mars 2023

Durée : 3 heures — Calculatrices interdites

Tous les résultats doivent être encadrés ou soulignés

Les exercices 1, 2 et 3 sont communs ; puis vous traiterez au choix l'un des deux exercices "BLANC" ou "ORANGE"

Exercice 1 — (Groupe symétrique)

Dans S_8, considère la permutation σ représentée par :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 7 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Ecrire σ comme un produit de cycles à supports disjoints.

2. En déduire la signature de σ, et le support de σ. Déterminer σ^{-1}.

3. Existe t'il une permutation τ dans S_8 telle que :

$$(1234)\sigma\tau = (12)(34)\tau\sigma^{-1}\,?$$

4. Questions rapides sur le groupe S_8.

a. Rappeler le cardinal de S_8 ; puis justifier que le groupe S_8 n'est pas abélien à l'aide d'un exemple.

b. Dans S_8, combien existe t-il :

— de transpositions ?

— de 6-cycles ?

— de produits d'un 3-cycle et d'un 4-cycle à supports disjoints ?

Exercice 2 — (Calcul matriciel)

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note $\omega_n = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,\pi/n}$ et A_n la matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ définie en posant :

$$A_n = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \text{ avec } a_{ij} = \omega_n^{(i-1)(j-1)}$$

1. Ecrire la matrice A_2. Montrer que A_2 est inversible, et préciser son inverse.

2. Le cas $n = 3$. On note $\overline{A_3} = (\overline{a_{ij}}) \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$.

a. Calculer $A_3 \times \overline{A}_3$.

b. Etablir que $A_3 \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$, et préciser son inverse.

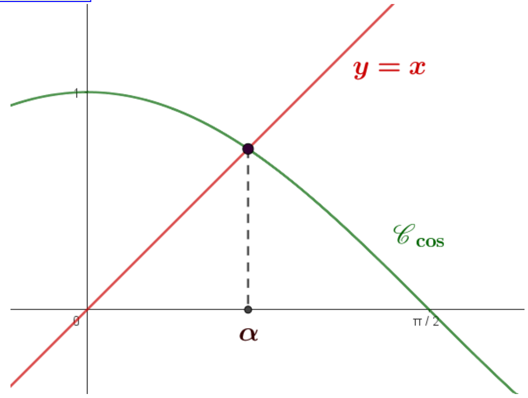
3. Le cas général. On revient au cas général, dans lequel n désigne un entier naturel $\geqslant 3$ quelconque.

Etablir que $A_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, et préciser son inverse.

EXERCICE 3 — (RÉSOLUTION APPROCHÉE D'UNE ÉQUATION)

Comme le suggère le graphe ci-contre, l'équation $\cos(x) = x$ *possède une unique solution réelle, qui appartient à l'intervalle* $[0, \pi/2]$ *; mais pour des raisons algébriques profondes, on ne peut pas déterminer la valeur exacte de cette solution.*

Le premier objectif de cet exercice est de prouver l'existence et l'unicité d'une solution α *de l'équation* $\cos(x) = x$*. Le second objectif est de construire une suite convergeant vers* α*, cette suite fournissant des valeurs approchées de* α*.*



Première partie - Questions préliminaires

On pose $I = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, et on définit une fonction f sur I en posant :

$$\forall\, x \in I, \quad f(x) = \cos(x) - x$$

1. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = 0$.

2. Montrer que α est l'unique solution dans I de l'équation :

$$\cos\left(\cos(x)\right) = x$$

Deuxième partie - Une suite de valeurs approchées de α

On définit une suite (u_n) en posant : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \cos(u_n) \end{cases}$

3. Etablir que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0, 1]$.

4. Justifier que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de monotonie opposée.

5. Etablir que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes.

6. Justifier que :

$$\lim_{n \to +\infty} u_{2n} = \alpha \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} u_{2n+1} = \alpha$$

Troisième partie - Estimation de la vitesse de convergence

Le résultat de la question 6 assure que (u_n) converge vers α, et que α appartient donc à l'intervalle $[0, 1]$. On pourra par ailleurs admettre dans la suite de cet exercice que $u_n \neq \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7. Soit n un entier naturel. Etablir que :

$$\exists\, c \in\ ]0, 1[\,, \quad |u_{n+1} - \alpha| = |\sin(c)| \times |u_n - \alpha|$$

8. En déduire que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant (\sin(1))^n$$

9. Soit p un entier naturel. On souhaite déterminer un rang n à partir duquel u_n est une valeur approchée de α à 10^{-p} près.

A cette fin, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (n \geqslant \lfloor y \rfloor + 1) \Longrightarrow (|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-p})$$

en ayant posé $y = \dfrac{-p\ln(10)}{\ln(\sin(1))}$.

Exercice BLANC — $\boxed{\text{Réduction d'une matrice carrée}}$

Dans cet exercice, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ -10 & 7 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Première partie - Questions préliminaires

1. Pour tout réel x, on note $M(x) = A - x\mathrm{I}_2$, où I_2 désigne la matrice identité de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Donner l'expression de $M(x)$ pour tout réel x.

2. Pour tout réel x, on note $d(x)$ le déterminant de $M(x)$. Calculer $d(x)$, et vérifier que $d(x)$ est un polynôme du second degré à coefficients entiers.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $d(x) = 0$. *

Deuxième partie - Matrices et systèmes linéaires

4. On considère le système linéaire d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$:

$$(S): \qquad AX = 2\,X$$

Montrer que le système (S) admet une infinité de solutions dans $\mathbb{R}^2$, dont on donnera la forme générale. En déduire qu'il existe un vecteur X_α solution du système de la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$. Préciser la valeur de α.

5. Comme dans la question précédente, montrer que le système linéaire :

$$(S'): \qquad AX = -3\,X$$

admet une infinité de solutions dans $\mathbb{R}^2$, dont on donnera la forme générale. En déduire qu'il existe un vecteur X_β solution du système de la forme $\begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix}$. Préciser la valeur de β.

6. On note $M = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ la matrice carrée dans laquelle les réels α et β ont été déterminés au cours des deux questions précédentes. Montrer que M est inversible et calculer son inverse.

---

*. On pourra vérifier que $d(x) = 0$ possède deux racines réelles distinctes, de signes opposés.

Troisième partie - Réduction de la matrice A

Dans cette partie, on considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

7. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.

8. Montrer que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale, que l'on notera D dans les questions suivantes.

9. Etablir que : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}$

10. En déduire l'expression de A^n pour tout entier naturel n (on explicitera les quatre coefficients de la matrice A^n en fonction de n).

Exercice ORANGE — Centre de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$

Soit n un entier $\geqslant 2$.

Une **matrice scalaire** dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice s'écrivant $\lambda \mathbf{I}_n$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$.

On note $\mathbf{S} = \{\lambda \mathbf{I}_n,\ \lambda \in \mathbb{K}\}$ l'ensemble des matrices scalaires de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Par ailleurs, on note $\mathbf{H}$ l'ensemble des matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec tous les éléments de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, c'est à dire :

$$\mathbf{H} = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall\, M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}),\ AM = MA\}$$

Enfin, pour tout couple $(m, p) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $\mathbf{E}_{mp}$ la matrice élémentaire dont tous les coefficients sont nuls, excepté celui situé à la m-ème ligne et p-ème colonne, qui vaut 1.

1. Justifier que $\mathbf{S} \subset \mathbf{H}$.

2. Etablir que $\mathbf{H}$ est un sous-groupe de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$; et que ce sous-groupe est non-trivial.

3. Soient m et p deux entiers de $[\![1, n]\!]$, et soit $A = (a_{ij})$ un élément de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

On note : $\quad R = A\mathbf{E}_{mp} \quad$ et $\quad L = \mathbf{E}_{mp}A$.

a. Etablir que : $\quad \forall\, (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ [j \neq p] \Longrightarrow [R_{ij} = 0]$

b. Etablir que : $\quad \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ R_{ip} = a_{im}$

c. En déduire la matrice R.[†]

d. Déterminer L.

4. Etablir que $\mathbf{S} = \mathbf{H}$.

---

†. C'est à dire écrire "explicitement" la matrice R, éventuellement avec des petits points...