Corrigé du DS de Mathématiques n^{0}8 — 4 mars 2023

Exercice 1 — (Groupe symétrique)

Dans S_8, considère la permutation σ représentée par :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 7 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Ecrire σ comme un produit de cycles à supports disjoints.

Conclusion. $\sigma = (1273)(46)$

2. En déduire la signature de σ, et le support de σ. Déterminer σ^{-1}.

D'après la question précédente : $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon((1273)) \times \varepsilon((46)) = (-1)^3 \times (-1) = 1$.

D'après la question précédente encore : $\mathrm{supp}\,(\sigma) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$.

Enfin : $\sigma^{-1} = (3721)\,(46) = (1372)(46)$.

3. Existe t'il une permutation τ dans S_8 telle que :

$$(1234)\sigma\tau = (12)(34)\tau\sigma^{-1}\,?$$

Supposons qu'il existe une telle permutation τ. Alors : $\varepsilon\left((1234)\sigma\tau\right) = \varepsilon\left((12)(34)\tau\sigma^{-1}\right)$.

Or : $\varepsilon\left((1234)\sigma\tau\right) = \varepsilon\left((1234)\right)\varepsilon\left(\sigma\right)\varepsilon\left(\tau\right) = -\varepsilon\left(\sigma\right)\varepsilon\left(\tau\right)$

Et : $\varepsilon\left((12)(34)\tau\sigma^{-1}\right) = \varepsilon\left((12)\right)\varepsilon\left((34)\right)\varepsilon\left(\tau\right)\varepsilon\left(\sigma^{-1}\right) = \varepsilon\left(\tau\right)\varepsilon\left(\sigma\right)$

On en déduit que : $\varepsilon\left(\tau\right)\varepsilon\left(\sigma\right) = -\varepsilon\left(\tau\right)\varepsilon\left(\sigma\right)$. C'est absurde.

Conclusion. Il n'existe aucune permutation τ dans S_8 telle que : $(1234)\sigma\tau = (12)(34)\tau\sigma^{-1}$.

4. Questions rapides sur le groupe S_8.

a. Rappeler le cardinal de S_8 ; puis justifier que le groupe S_8 n'est pas abélien à l'aide d'un exemple.

D'après le cours, le cardinal de S_8 est $8!$.[*]

Par ailleurs : $(12)(13) = (132)$ tandis que $(13)(12) = (123)$. Puisque $(12)(13) \neq (13)(12)$, le groupe S_8 n'est pas abélien.

b. Dans S_8, combien existe t-il :

— de transpositions ?

Il existe $\binom{8}{2}$ transpositions dans S_8 (et pour info : $\binom{8}{2} = 28$)

— de 6-cycles ?

Il existe $\binom{8}{6} \times 5! = \binom{8}{2} \times 5!$ 6-cycles dans S_8 (et pour info : $\binom{8}{2} \times 5! = 3\,360$)

∗. Et $8! = 40\,320$, pour information.

— de produits d'un 3-cycle et d'un 4-cycle à supports disjoints ?

Il existe $\binom{8}{3} \times \binom{5}{4} \times 2! \times 3!$ produits d'un 3-cycle et d'un 4-cycle à supports disjoints dans S_8 (et pour info : $\binom{8}{3} \times \binom{5}{4} \times 2! \times 3! = \binom{8}{3} \times 5 \times 2 \times 6 = 3\,360$)

Exercice 2 — **(Calcul matriciel)**

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note $\omega_n = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,\pi/n}$ et A_n la matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ définie en posant :

$$A_n = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \text{ avec } a_{ij} = \omega_n^{(i-1)(j-1)}$$

1. Ecrire la matrice A_2. Montrer que A_2 est inversible, et préciser son inverse.

D'après l'énoncé : $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (puisque pour $n = 2$ on a : $\omega = -1$).

La matrice A_2 est inversible, puisque $\det(A_2) = -2 \neq 0$. En outre, son inverse est :

$$A_2^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{soit :} \quad A_2^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Conclusion. $A_2 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et $A_2^{-1} = \dfrac{1}{2} A_2$.

2. Le cas $n = 3$. On note $\overline{A_3} = (\overline{a_{ij}}) \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$.

a. Calculer $A_3 \times \overline{A_3}$.

D'après l'énoncé : $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 \\ 1 & \mathrm{j}^2 & \mathrm{j} \end{pmatrix}$ (puisque pour $n = 3$ on a : $\omega = \mathrm{j}$, et $\mathrm{j}^3 = 1$).

Puisque $\bar{\mathrm{j}} = \mathrm{j}^2$, on a : $\overline{A_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{j}^2 & \mathrm{j} \\ 1 & \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 \end{pmatrix}$.

Il s'ensuit que : $A_3 \times \overline{A_3} = 3\mathrm{I}_3$ (essentiellement car $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$).

Conclusion. $A_3 \times \overline{A_3} = 3\mathrm{I}_3$

b. Etablir que $A_3 \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$, et préciser son inverse.

D'après la question précédente : $A_3 \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ et $A_3^{-1} = \dfrac{1}{3}\overline{A_3}$.

3. Le cas général. On revient au cas général, dans lequel n désigne un entier naturel $\geqslant 3$ quelconque.

Etablir que $A_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, et préciser son inverse.

Soit n un entier naturel $\geqslant 2$. Notons $P = A_n \times \overline{A_n}$.

➤ Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$. On a :

$$P_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A_n)_{ik} \left(\overline{A_n}\right)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \omega^{(i-1)(k-1)}\overline{\omega^{(k-1)(j-1)}} = \sum_{k=1}^{n} \omega^{(i-1)(k-1)}\omega^{(k-1)(1-j)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \omega^{(i-j)(k-1)} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega^{(i-j)}\right)^k =_{\omega^{(i-j)}\neq 1} \frac{1-\left(\omega^{(i-j)}\right)^n}{1-\omega^{(i-j)}} = 0 \qquad (\spadesuit)$$

➤ Soit $i \in [\![1,n]\!]$. On a :

$$P_{ii} = \sum_{k=1}^{n} (A_n)_{ik} \left(\overline{A_n}\right)_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \omega^{(i-1)(k-1)}\overline{\omega^{(k-1)(i-1)}} = \sum_{k=1}^{n} 1 = n \qquad (\clubsuit)$$

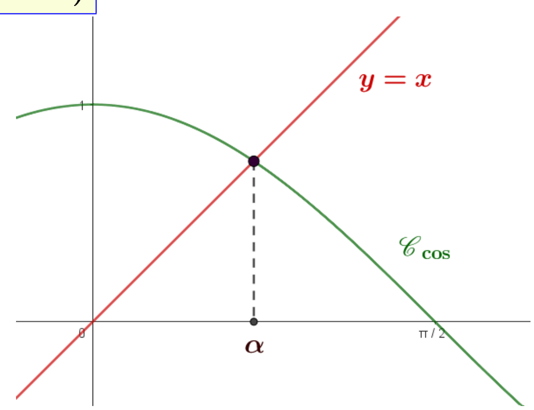
➤ Selon $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$: $\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ P_{ij} = n\delta_{ij}$. Ce qui signifie que : $P = n\mathrm{I}_n$, càd : $A_n \times \overline{A_n} = n\mathrm{I}_n$. On en déduit que A_n est inversible, et $A_n^{-1} = \dfrac{1}{n}\overline{A_n}$.

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ A_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $A_n^{-1} = \dfrac{1}{n}\overline{A_n}$

Exercice 3 — (Résolution approchée d'une équation)

Comme le suggère le graphe ci-contre, l'équation $\cos(x) = x$ possède une unique solution réelle, qui appartient à l'intervalle $[0,\pi/2]$; mais pour des raisons algébriques profondes, on ne peut pas déterminer la valeur exacte de cette solution.

Le premier objectif de cet exercice est de prouver l'existence et l'unicité d'une solution α de l'équation $\cos(x) = x$. Le second objectif est de construire une suite convergeant vers α, cette suite fournissant des valeurs approchées de α.



Première partie - Questions préliminaires

On pose $I = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, et on définit une fonction f sur I en posant :

$$\forall\, x \in I, \quad f(x) = \cos(x) - x$$

1. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = 0$.

La fonction f est continue et strictement décroissante sur I. Elle réalise donc une bijection de I vers $f(I) = \left[-\dfrac{\pi}{2}, 1\right]$.

Puisque $0 \in f(I)$, il admet un unique antécédent par f dans I.

Conclusion. Il existe un unique réel $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = 0$.

2. Montrer que α est l'unique solution dans I de l'équation :

$$\cos\left(\cos(x)\right) = x$$

D'après la question précédente, le réel α est dans I, et vérifie : $\cos(\alpha) = \alpha$.

On en déduit aisément que : $\cos\left(\cos(\alpha)\right) = \alpha$.

A ce stade, on a juste vérifié que α est une solution dans I de l'équation $\cos\left(\cos(x)\right) = x$.

Montrons son unicité. On introduit la fonction g en posant :

$$\forall\, x \in I, \quad g(x) = \cos\left(\cos(x)\right) - x$$

Selon les théorèmes généraux, la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et pour tout x dans I on a :

$$g'(x) = \sin(x)\sin(\cos(x)) - 1$$

Il est clair que : $\sin(x)\sin(\cos(x)) \leqslant 1$ (le produit de deux réels appartenant à $[-1, 1]$ étant $\leqslant 1$).

On en déduit que : $\forall\, x \in I,\ g'(x) \leqslant 0$. Ce qui prouve que la fonction g est décroissante sur I.

Prouvons en outre que g' ne s'annule pas sur I. Soit x un réel de I. On a :

$$g'(x) = 0 \Longleftrightarrow \sin(x)\sin(\cos(x)) = 1 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \sin(x) = 1 \text{ et } \sin(\cos(x)) = 1 \quad (\text{cas } 2) \\ \text{ou} \\ \sin(x) = -1 \text{ et } \sin(\cos(x)) = -1 \quad (\text{cas } 2) \end{array}\right.$$

La fonction sin étant positive sur I, on a : $\sin(x) \neq -1$. Le cas 2 n'est donc pas possible.

Pour tout réel x dans I, on a : $\cos(x) \in [0, 1]$. Or la fonction sin est majorée sur $[0, 1]$, par $\sin(1) < 1$. On en déduit que pour tout réel x dans I : $\sin(\cos(x)) \neq 1$. Le cas 1 n'est donc pas possible.

On en déduit que g' ne s'annule pas sur I.

Par conséquent, la fonction g est strictement décroissante sur I : α est donc l'unique antécédent de 0 par la fonction g.

Conclusion. α est l'unique solution dans I de l'équation : $\cos\left(\cos(x)\right) = x$

Deuxième partie - Une suite de valeurs approchées de α

On définit une suite (u_n) en posant : $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \cos(u_n) \end{array}\right.$

3. Etablir que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0, 1]$.

Récurrence immédiate sur n.

4. Justifier que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de monotonie opposée.

La suite (u_n) est définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = \cos(u_n)$, et est à valeurs dans $[0, 1]$.

Puisque la fonction cos est décroissante sur $[0, 1]$, le cours assure que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de monotonie opposée.

5. Etablir que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes.

Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones (question 4) et bornées (question 3). Par une double application du théorème de la limite monotone, on en déduit que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes.

6. Justifier que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \alpha \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \alpha$$

D'après la question précédente, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes. Notons : $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n}$ et $\ell' = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}$.

Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont définies par récurrence à l'aide de la fonction $h : x \longmapsto \cos(\cos(x))$ (qui est continue sur I).

On en déduit que ℓ et ℓ' sont solutions de l'équation $h(x) = x$. Or cette équation possède une unique solution, égale à α selon la question 2.

D'où : $\ell = \ell' = \alpha$.

Conclusion. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \alpha$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \alpha$

Troisième partie - Estimation de la vitesse de convergence

Le résultat de la question 6 assure que (u_n) converge vers α, et que α appartient donc à l'intervalle $[0,1]$. On pourra par ailleurs admettre dans la suite de cet exercice que $u_n \neq \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7. Soit n un entier naturel. Etablir que :

$$\exists\, c \in \,]0,1[\,, \quad |u_{n+1} - \alpha| = |\sin(c)| \times |u_n - \alpha|$$

Soit n un entier naturel. Les réels α et u_n appartiennent à $[0,1]$. Sur l'intervalle $[0,1]$, la fonction cos est continue, et dérivable sur $]0,1[$.

Il est donc légitime d'appliquer le TAF à la fonction cos entre u_n et α : il existe un réel c strictement compris entre u_n et α (donc c est strictement compris entre 0 et 1) tel que :

$$-\sin(c) = \frac{\cos(u_n) - \cos(\alpha)}{u_n - \alpha} \Longleftrightarrow -\sin(c) = \frac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha}$$

Par conséquent :

$$\exists\, c \in \,]0,1[\,, \quad u_{n+1} - \alpha = -\sin(c) \times (u_n - \alpha)$$

Conclusion. $\exists\, c \in \,]0,1[\,, \quad |u_{n+1} - \alpha| = |\sin(c)| \times |u_n - \alpha|$

8. En déduire que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant (\sin(1))^n$$

Récurrence immédiate sur n.

9. Soit p un entier naturel. On souhaite déterminer un rang n à partir duquel u_n est une valeur approchée de α à 10^{-p} près.

A cette fin, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (n \geqslant \lfloor y \rfloor + 1) \Longrightarrow (|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-p})$$

en ayant posé $y = \dfrac{-p\ln(10)}{\ln(\sin(1))}$.

D'après la question précédente : $((\sin(1))^n \leqslant 10^{-p}) \Longrightarrow (|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-p}) \quad (\spadesuit)$.

Déterminons les entiers n tels que : $(\sin(1))^n \leqslant 10^{-p}$.

On a :

$$(\sin(1))^n \leqslant 10^{-p} \Longleftrightarrow e^{n\ln(\sin(1))} \leqslant e^{-p\ln(10)} \Longleftrightarrow n\ln(\sin(1)) \leqslant e^{-p\ln(10)} \Longleftrightarrow n \geqslant \frac{-p\ln(10)}{\ln(\sin(1))}\,^{\dagger}$$

Puisque n est un entier, on en déduit que : $(\sin(1))^n \leqslant 10^{-p} \Longleftrightarrow n \geqslant \left\lfloor \dfrac{-p\ln(10)}{\ln(\sin(1))} \right\rfloor \quad (\clubsuit)$.

Conclusion. D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$: $\forall n \in \mathbb{N}, \ \left(n \geqslant \left\lfloor \dfrac{-p\ln(10)}{\ln(\sin(1))} \right\rfloor + 1\right) \Longrightarrow (|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-p})$

Exercice BLANC — Réduction d'une matrice carrée

Dans cet exercice, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ -10 & 7 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Première partie - Questions préliminaires

1. Pour tout réel x, on note $M(x) = A - x\mathrm{I}_2$, où I_2 désigne la matrice identité de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Donner l'expression de $M(x)$ pour tout réel x.

Pour tout réel x on a : $M(x) = \begin{pmatrix} -8-x & 5 \\ -10 & 7-x \end{pmatrix}$

2. Pour tout réel x, on note $d(x)$ le déterminant de $M(x)$. Calculer $d(x)$, et vérifier que $d(x)$ est un polynôme du second degré à coefficients entiers.

Pour tout réel x, on a : $d(x) = (-8-x)(7-x) - (-10)\times 5 = (x+8)(x-7) + 50 = x^2 + x - 56 + 50$.

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad d(x) = x^2 + x - 6$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $d(x) = 0$. ‡

Aisément : d possède exactement deux racines, qui sont 2 et -3.

†. Le changement de sens provenant de la négativité de $\ln(\sin(1))$.

‡. On pourra vérifier que $d(x) = 0$ possède deux racines réelles distinctes, de signes opposés.

Deuxième partie - Matrices et systèmes linéaires

4. On considère le système linéaire d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$:

$$(S) : \qquad AX = 2\ X$$

Montrer que le système (S) admet une infinité de solutions dans $\mathbb{R}^2$, dont on donnera la forme générale. En déduire qu'il existe un vecteur X_α solution du système de la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$. Préciser la valeur de α.

Avec les notations de l'énoncé, on a :

$$AX = 2X \iff \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ -10 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -8x_1 + 5x_2 = 2x_1 \\ -10x_1 + 7x_2 = 2x_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ x_2 = 2x_1 \end{cases}$$

Conclusion. L'ensemble des solutions du système (S) est donc : $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{pmatrix}, \quad x_1 \in \mathbb{R} \right\}$. En particulier le vecteur $X_{\alpha=2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est solution de (S).

5. Comme dans la question précédente, montrer que le système linéaire :

$$(S') : \qquad AX = -3\ X$$

admet une infinité de solutions dans $\mathbb{R}^2$, dont on donnera la forme générale. En déduire qu'il existe un vecteur X_β solution du système de la forme $\begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix}$. Préciser la valeur de β.

Avec les notations de l'énoncé, on a :

$$AX = -3X \iff \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ -10 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -8x_1 + 5x_2 = -3x_1 \\ -10x_1 + 7x_2 = -3x_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$$

Conclusion. L'ensemble des solutions du système (S') est donc : $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad x_1 \in \mathbb{R} \right\}$. En particulier le vecteur $X_{\beta=1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est solution de (S').

6. On note $M = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ la matrice carrée dans laquelle les réels α et β ont été déterminés au cours des deux questions précédentes. Montrer que M est inversible et calculer son inverse.

D'après les questions précédentes : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Comme $\det(M) = -1 \neq 0$, la matrice M est inversible et :

$$M^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \iff M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Troisième partie - Réduction de la matrice A

Dans cette partie, on considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

7. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.

Cf question précédente.

8. Montrer que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale, que l'on notera D dans les questions suivantes.

Après calcul : $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(2, -3)$

9. Etablir que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}$

Récurrence classique (question de cours déjà étudiée).

10. En déduire l'expression de A^n pour tout entier naturel n (on explicitera les quatre coefficients de la matrice A^n en fonction de n).

Soit n un entier naturel. D'après la question précédente, on a : $A^n = PD^nP^{-1}$.

Or :

$$D^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^n & 2^n \\ 2 \times (-3)^n & -(-3)^n \end{pmatrix}$$

D'où :

$$PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2^n & 2^n \\ 2 \times (-3)^n & -(-3)^n \end{pmatrix}$$

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\quad A^n = \begin{pmatrix} -2^n + 2 \times (-3)^n & 2^n - (-3)^n \\ -2^{n+1} + 2 \times (-3)^n & 2^{n+1} - (-3)^n \end{pmatrix}$

Exercice ORANGE — Centre de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$

Soit n un entier $\geqslant 2$.

Une **matrice scalaire** dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice s'écrivant $\lambda \mathbf{I}_n$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$.

On note $\mathbf{S} = \{\lambda \mathbf{I}_n,\ \lambda \in \mathbb{K}\}$ l'ensemble des matrices scalaires de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Par ailleurs, on note $\mathbf{H}$ l'ensemble des matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec tous les éléments de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, c'est à dire :

$$\mathbf{H} = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}),\ AM = MA\}$$

Enfin, pour tout couple $(m,p) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $\mathbf{E}_{mp}$ la matrice élémentaire dont tous les coefficients sont nuls, excepté celui situé à la m-ème ligne et p-ème colonne, qui vaut 1.

1. Justifier que $\mathbf{S} \subset \mathbf{H}$.

Trivial.

2. Etablir que $\mathbf{H}$ est un sous-groupe de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$; et que ce sous-groupe est non-trivial.

On vérifie les 4 axiomes $(SG1)$,..., $(SG4)$ pour répondre à la première partie de la question.

Puisque la matrice identité (qui n'est pas la matrice nulle, wouaouh !) appartient au sous-groupe H, celui-ci n'est pas trivial.

3. Soient m et p deux entiers de $[\![1,n]\!]$, et soit $A = (a_{ij})$ un élément de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

On note : $R = A\mathbf{E}_{mp}$ et $L = \mathbf{E}_{mp}A$.

a. Etablir que : $\forall\, (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ [j \neq p] \Longrightarrow [R_{ij} = 0]$

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Supposons que $j \neq p$.

On a : $R_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (\mathbf{E}_{mp})_{kj}$. Or $(\mathbf{E}_{mp})_{kj} = 0$ pour tout k, puisque l'on a supposé $j \neq p$.

Conclusion. $\forall\, (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ [j \neq p] \Longrightarrow [R_{ij} = 0]$

b. Etablir que : $\forall\, i \in [\![1,n]\!],\ R_{ip} = a_{im}$

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. On a : $R_{ip} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (\mathbf{E}_{mp})_{kp}$. Or $(\mathbf{E}_{mp})_{kp} = 0$ pour tout $k \neq m$, tandis que $(\mathbf{E}_{mp})_{mp} = 1$.

Conclusion. $\forall\, i \in [\![1,n]\!],\ R_{ip} = a_{im}$

c. En déduire la matrice R.[§]

D'après ce qui précède :[¶] $A\mathbf{E}_{mp} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{2m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nm} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

d. Déterminer L.

On adapte les raisonnements des questions précédentes. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Supposons que $i \neq m$.

On a : $L_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\mathbf{E}_{mp})_{ik}\, a_{kj}$. Or $(\mathbf{E}_{mp})_{ik} = 0$ pour tout k, puisque l'on a supposé $i \neq m$.

$\boxed{\text{D'où : } \forall\ (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ [i \neq m] \Longrightarrow [L_{ij} = 0]}$

Soit $j \in [\![1,n]\!]$. On a : $L_{mj} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\mathbf{E}_{mp})_{mk}\, a_{kj}$. Or $(\mathbf{E}_{mp})_{mk} = 0$ pour tout $k \neq p$, tandis que $(\mathbf{E}_{mp})_{mp} = 1$.

$\boxed{\textbf{Conclusion}.\ \forall\, j \in [\![1,n]\!],\ L_{mj} = a_{pj}}$.

D'après ce qui précède :[‖] $\mathbf{E}_{mp}A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

4. Etablir que $\mathbf{S} = \mathbf{H}$.

Soit $A \in \mathbf{H}$. Alors A commute avec toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, et en particulier :

$$\forall\,(m,p) \in [\![1,n]\!]^2,\ A\mathbf{E}_{mp} = \mathbf{E}_{mp}A$$

D'après 3-c et d, pour tout $(m,p) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{2m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nm} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

§. C'est à dire écrire "explicitement" la matrice R, éventuellement avec des petits points...
¶. Les coefficients a_{im} étant situés en p-ème colonne.
‖. Les coefficients a_{pj} étant situés en m-ème ligne.

On en déduit l'égalité des coefficients situés à l'intersection de la p-ème colonne et de la m-ème ligne des deux matrices, et la nullité de tous les autres. Explicitement :

$$a_{mm} = a_{pp} \qquad \text{et} \qquad \forall\, i \in [\![\, 1, n \,]\!],\ [i \neq m \Longrightarrow a_{im} = 0] \wedge [i \neq p \Longrightarrow a_{pi} = 0]$$

Puisque ces assertions sont valides pour un couple (m, p) arbitraire, on en déduit que :

$$\forall\, (i, j) \in [\![\, 1, n \,]\!]^2,\ [a_{ii} = a_{jj}] \wedge [i \neq j \Longrightarrow a_{ij} \neq 0]$$

En d'autres termes, la matrice A est diagonale, et ses coefficients diagonaux sont deux à deux égaux. Il s'ensuit que $A = a_{11}\mathbf{I}_n$. D'où $A \in \mathbf{H}$.

En résumé, on a établi l'implication : $A \in \mathbf{H} \Longrightarrow A \in \mathbf{S}$. D'où : $\mathbf{H} \subset \mathbf{S}$.

On en déduit, avec la question 1 et la règle de double inclusion que : $\mathbf{S} = \mathbf{H}$.

Conclusion. $\mathbf{S} = \mathbf{H}$. Autrement dit, l'ensemble des matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est exactement l'ensemble des matrices scalaires.