Chapitre 18 — "L'essentiel" sur l'analyse asymptotique

Préambule. Ce chapitre comporte deux grandes parties.

La première, technique et théorique, consiste à introduire les relations de comparaison sur les fonctions. Essentiellement, l'intérêt de ces notions est d'apporter un "confort" de rédaction ; sur le fond peu de propriétés franchement nouvelles découleront des définitions données au cours de cette partie.

La seconde partie, consacrée aux développements limités, vous permettra en revanche de franchir un palier très important en Analyse, notamment lorsqu'il s'agira de lever des formes indéterminées dans des calculs de limites (en attendant davantage d'applications en fin d'année, et en Spé).

Table des matières

1. Analyse asymptotique - Relations de comparaison 2
1.1. Relation de négligeabilité 2
1.2. Relation d'équivalence 3
1.3. Relation de domination 4
2. Développements limités 4
2.1. Généralités 4
2.2. Le point de départ : Formule de Taylor 4
2.3. Développements limités et opérations usuelles 5
2.4. Formulaire des développements limités et équivalents usuels 6

1. Analyse asymptotique - Relations de comparaison

1.1. Relation de négligeabilité.

Définition 1 - Une fonction f est **négligeable devant** g **au voisinage de** a s'il existe une fonction ε définie au voisinage de a telle que : $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.

Notation. On note : $f = o_a(g)$, ou $f(x) = o_a(g(x))$, ou encore $f(x) << g(x)$ lorsque x tend vers a (la dernière notation étant plutôt utilisée par les Physiciens).

Propriété 1 - (**Caractérisation de la négligeabilité**). Sous réserve que g ne s'annule pas sur un voisinage de a, on a :

$$f = o_a(g) \iff \lim_a \frac{f}{g} = 0$$

Propriété 2 - (**Quelques propriétés des "o"**).

1/ $f = o_a(1)$ SSI $\lim\limits_a f = 0$

2/ $\lambda o_a(g) = o_a(g)$ (λ réel)

3/ $o_a(g) + o_a(g) = o_a(g)$

4/ $ho_a(g) = o_a(gh)$ (h fonction définie au voisinage de a)

5/ $o_a\left(o_a(g)\right) = o_a(g)$

Exemples.

1/ On a : $\sin(x) = o_{+\infty}\left(x^2\right)$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(x)/x^2 = 0$ (encadrement).

2/ On a : $x^2 = o_{+\infty}\left(\mathrm{e}^x\right)$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x} = 0$ (croissances comparées).

3/ Soient α et β réels, avec $\alpha < \beta$. Alors : $x^\alpha = o_{+\infty}\left(x^\beta\right)$.

4/ Soient α et β réels, avec $\alpha < \beta$. Alors : $x^\beta = o_0\left(x^\alpha\right)$.

5/ Soient a et b réels, avec $0 < a < b$. Alors : $a^x = o_{+\infty}\left(b^x\right)$ (croissances comparées).

Synthèse — Echelle de négligeabilité en $+\infty$

$$\mathrm{e}^{-x} \ll \frac{1}{x^2} \ll \frac{1}{x} \ll \frac{1}{\ln x} \ll 1 \ll x \ll x^2 \ll \mathrm{e}^x$$

Synthèse — Echelle de négligeabilité en 0^+

$$x^2 \ll x \ll \sqrt{x} \ll \frac{1}{\ln x} \ll 1 \ll \ln x \ll \frac{1}{\sqrt{x}} \ll \frac{1}{x} \ll \frac{1}{x^2}$$

1.2. **Relation d'équivalence.**

Définition 2 - Deux fonctions f et g sont **équivalentes au voisinage de** a s'il existe une fonction φ définie au voisinage de a telle que : $f(x) = g(x)\varphi(x)$.

Notation. On note : $f \sim_a g$, ou $f(x) \sim_{x \to a} g(x)$. On dit encore que f est un équivalent de g au voisinage de a.

Propriété 3 - (**Caractérisation de l'équivalence**). Sous réserve que g ne s'annule pas sur un voisinage de a, on a :

$$f \sim_a g \iff \lim_a \frac{f}{g} = 1$$

Propriété 4 - (**Quelques propriétés des "$\sim$"**).

1/ la réflexion d'équivalence en a ("$\sim_a$") est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique, transitive).

2/ $f \sim_a g$ SSI $f = g + o_a(g)$

3/ Si $f \sim_a g$ et $g = o_a(h)$ alors $f = o_a(h)$

4/ Si $f \sim_a g$ et $g = o_a(h)$ alors $f = o_a(h)$

5/ **Equivalents et opérations algébriques**.

a/ Si $f_1 \sim_a f_2$ et $g_1 \sim_a g_2$ alors : $f_1 g_1 \sim_a f_2 g_2$

b/ Si $f_1 \sim_a f_2$ et $g_1 \sim_a g_2$ alors : $\dfrac{f_1}{g_1} \sim_a \dfrac{f_2}{g_2}$ (sous réserve...)

c/ Si $f_1 \sim_a f_2$ alors : $\forall p \in \mathbb{Z}$, $f_1^p \sim_a f_2^p$ (sous réserve...)

Exemples.

1/ On a : $x + 1 \sim_{+\infty} x$; $x + \sin(x) \sim_{+\infty} x$; $e^x - 2\ln(x) + 3\sqrt{x} - x^3 \sim_{+\infty} e^x$

2/ On a : $\sin(x) \sim_0 x$; $\ln(1+x) \sim_0 x$; $\tan(x) \sim_0 x$; $\arctan(x) \sim_0 x$

3/ On a : $1 - \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}} \sim_{+\infty} -\dfrac{1}{2x}$

✠

Une propriété essentielle de ce chapitre est la suivante : elle permet de lever des formes indéterminées dans des calculs de limites inaccessibles par d'autres moyens.

Propriété 5 - (**Propriété essentielle des équivalents**).
Si $f \sim_a g$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x) = \ell \in \bar{\mathbb{R}}$ ou $\in \mathbb{C}$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = \ell$

Cet énoncé permet donc de ramener le calcul le limite d'une fonction "compliquée" à celui d'une fonction équivalente "plus simple".

Exemples.

1/ Puisque $e^x - 2\ln(x) + 3\sqrt{x} - x^3 \sim_{+\infty} e^x$, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x - 2\ln(x) + 3\sqrt{x} - x^3 = +\infty$

2/ Puisque $1 - \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}} \sim_{+\infty} -\dfrac{1}{2x}$, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \sqrt{x^2 + x} = -\dfrac{1}{2}$.

1.3. Relation de domination.

Définition 3 - Une fonction f est **dominée par** g **au voisinage de** a s'il existe un réel $M \in \mathbb{R}_+$ tel que sur un voisinage de a on ait : $|f(x)| \leqslant M\,|g(x)|$.

Notation. On note : $f = O_a(g)$, ou $f(x) = O_a(g(x))$.

Propriété 6 - (**Caractérisation de la domination**). Sous réserve que g ne s'annule pas sur un voisinage de a, on a :

$$f = O_a(g) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{f}{g} \text{ est bornée au voisinage de } a$$

Propriété 7 - (**Quelques propriétés des "O"**).

1/ $\lambda O_a(g) = O_a(g)$

2/ $O_a(g) + O_a(g) = O_a(g)$

3/ $hO_a(g) = O_a(gh)$

4/ Si $f = o_a(g)$ et $g = O_a(h)$ alors : $f = O_a(h)$.

5/ Si $f = O_a(g)$ et $g = o_a(h)$ alors : $f = o_a(h)$.

6/ Si $f = O_a(g)$ et $g = O_a(h)$ alors : $f = O_a(h)$.

2. Développements limités

2.1. Généralités.

Définition. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert non-vide et à valeurs réelles, a un élément de I et n un entier naturel. La fonction f admet un développement limité à l'ordre n en a s'il existe :

- $(n+1)$ scalaires $a_0, a_1 \ldots, a_n$,
- une fonction $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \varepsilon(x) = 0$,

tels que : $\forall\, x \in\; I,\; f(x) = \left[\sum_{k=0}^{n} a_k\,(x-a)^k\right] + (x-a)^n\,\varepsilon(x)$

Propriété (unicité du DL). Si f admet un développement limité à l'ordre n en a, alors celui-ci est unique.

2.2. Le point de départ : Formule de Taylor.

Le point-clef est la formule de Taylor-Young, qui fait le lien entre le développement limité d'une fonction et ses dérivées successives.

Théorème (FORMULE DE TAYLOR-YOUNG) : si $f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $a \in\; I$, alors f admet un DL à l'ordre n en a, explicitement :

$$\forall\, x \in\; I, \quad f(x) = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k\right] + o\left((x-a)^n\right)$$

Réciproque fausse ! La fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto 1 + x + x^2 + x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ prolongée par continuité en posant $f(0) = 1$ admet un développement limité à l'ordre 2 en 0, mais n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$ en 0, car $f''(0)$ n'existe pas.

La formule de Taylor-Young permet donc d'obtenir les DL des fonctions dont on connaît bien les dérivées successives : exponentielle et $x \mapsto 1/(1-x)$ par exemple...

Propriété (DL et parité) : si $f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ est paire (*resp.* impaire) alors la partie régulière du développement limité de f en 0 ne contient que des termes de degré pair (*resp.* impair).

Exemples d'illustration : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$

et : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$

2.3. **Développements limités et opérations usuelles.**

Propriété (DL et multiplication par un scalaire) : Soit λ un réel. Si f admet un développement limité à l'ordre n, alors λf admet un développement limité à l'ordre n obtenu multipliant la partie régulière par λ.

Propriété (DL et somme) : Si f et g admettent un développement limité au même ordre n, alors $f + g$ admet un développement limité à l'ordre n obtenu en ajoutant terme à terme les DL de f et g.

Exemples d'application : DL de ch et de sh une fois connus ceux de e^x et e^{-x}.

Propriété (DL et produit) : Si f et g admettent un développement limité au même ordre n, alors la fonction fg admet un développement limité à l'ordre n, dont la partie régulière est le produit des parties régulières des DL de f et de g, tronqué à l'ordre n.

Exemples d'application : questions 1, 3, 5, 14, 15 de l'exercice 1 (feuille d'exos 18).

Propriété (DL et intégration) : Si f admet un développement limité à l'ordre n en a, la primitive F de f s'annulant en a admet un DL à l'ordre $n + 1$ en a obtenu en primitivant terme à terme la partie régulière du développement limité de f.

Exemples d'application : DL de $\ln(1 + x)$ à partir de celui de $1/(1 + x)$; DL de $\arctan(x)$ une fois connu celui de $1/(1 + x^2)$.

Propriété (DL et dérivation) : Si f admet un développement limité à l'ordre n en a, alors f' admet un DL à l'ordre $n - 1$ en a obtenu en dérivant terme à terme la partie régulière du développement limité de f.

Exemples d'application : DL de $1/\cos^2 x$ une fois connu celui de $\tan x$.

Propriété (DL et composition) : Si f admet en 0 un développement limité à l'ordre n, et si u admet en 0 un DL à l'ordre n et tend vers 0 quand x tend vers 0, alors la fonction $f \circ u$ admet un développement limité à l'ordre n, dont la partie régulière est obtenue en remplaçant dans le DL de f les “x” par la partie régulière du DL de u, et en tronquant à l'ordre n.

Exemples d'application : DL de e^{x^3}, de $\mathrm{e}^{\sin x}$; questions 2, 4, 14, 16, 21… de l'exercice 1.

2.4. **Formulaire des développements limités et équivalents usuels.** "LES FONDAMENTAUX"

✏ $\boxed{\mathrm{e}^x = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right] + o(x^n)}$ $= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

✏ $\boxed{\mathrm{ch}(x) = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right] + o(x^{2n+1})}$ $= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$

✏ $\boxed{\mathrm{sh}\ (x) = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right] + o(x^{2n+2})}$ $= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$

✏ $\boxed{\cos(x) = \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right] + o(x^{2n+1})}$ $= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$

✏ $\boxed{\sin(x) = \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right] + o(x^{2n+2})}$ $= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$

✏ $\boxed{\frac{1}{1-x} = \left[\sum_{k=0}^{n} x^k\right] + o(x^n)}$ $= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$

✏ $\boxed{\ln(1+x) = \left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}\right] + o(x^n)}$ $= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$

✏ $\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (\alpha - i)}{k!} x^k\right] + o(x^n)}$ $= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \cdots$
$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$

"CONSÉQUENCES DES FONDAMENTAUX"

✏ $\boxed{\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + o\left(x^{10}\right)}$ *(par quotient à partir des DL de sin et de cos)*

✏ $\boxed{\mathrm{th}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + o\left(x^{10}\right)}$ *(par quotient à partir des DL de sh et de ch)*

✏ $\boxed{\arctan(x) = \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right] + o(x^{2n+2})}$ $= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+2}\right)$ *(primitivation du DL de $1/(1+x^2)$)*

✏ $\boxed{\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \frac{35x^9}{1152} + o\left(x^{10}\right)}$ *(DL de $\left(1-x^2\right)^{-1/2}$, puis primitivation)*

✏ $\boxed{\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{112} - \frac{35x^9}{1152} + o\left(x^{10}\right)}$ *(utilisation de l'identité : $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$)*

Exemples de cas particuliers fréquents”

✏ $\boxed{e^{-x} = \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!}\right] + o(x^n)}$ $= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ *(changement de variable $x \longmapsto -x$ dans le DL de e^x)*

✏ $\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)}$ *(cas particulier du DL de $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha = 1/2$)*

Exemples de développements asymptotiques (“DL au voisinage de $+\infty$”) [1]

✏ $\boxed{e^{\frac{1}{x}} = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!\,x^k}\right] + o\left(\frac{1}{x^n}\right)}$ $= 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + \cdots + \frac{1}{n!\,x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$

✏ $\boxed{\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!\,x^{2k+1}}\right] + o\left(\frac{1}{x^{2n+2}}\right)}$ $= \frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{120x^5} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!\,x^{2n+1}} + o\left(\frac{1}{x^{2n+2}}\right)$

✏ $\boxed{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{kx^k}\right] + o\left(\frac{1}{x^n}\right)}$ $= \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{nx^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$

✏ $$\boxed{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^\alpha = 1 + \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (\alpha - i)}{k!x^k}\right] + o\left(\frac{1}{x^n}\right)} = 1 + \frac{\alpha}{x} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2x^2} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6x^3} + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!\,x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

Quelques équivalents usuels [2]

$e^{\frac{1}{n}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$	$\tan\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$	$\arccos\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{\pi}{2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$
$\operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$	$\operatorname{th}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$	$\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$
$\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$	$\arctan\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$	$\operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$
$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$	$\arcsin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$	$\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \underset{+\infty}{\sim} 1 + \frac{1}{2n}$

1. Formules obtenues à l’aide du changement de variable $x \longmapsto \frac{1}{x}$.

2. Extrêmement utiles dans les problèmes faisant intervenir les suites et les séries. C’est ce qui justifie l’écriture de ces équivalents avec $1/n$ (n tendant vers $+\infty$) plutôt qu’avec un x tendant vers 0. Mais évidemment, toutes ces formules peuvent être adaptées à la seconde situation, c’est-à-dire par exemple : $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ ou encore $\sin x \underset{0}{\sim} x$, *etc...*