

EXERCICES 18 — DL ET ÉQUIVALENTS

EXERCICE 1. — (Négligeabilité) 1/ Justifier brièvement que x^2 est négligeable devant e^x au voisinage de $+\infty$.

2/ Justifier brièvement que x est négligeable devant \sqrt{x} au voisinage de 0.

3/ Peut-on affirmer que x^2 est négligeable devant x^3 , et que x^3 est négligeable devant x^2 ?

EXERCICE 2. — (Equivalence - Suites) Soient u et v deux suites. On dit que u est **équivalente** à v si l'on peut écrire :

$$u_n = v_n \times \varphi_n \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = 1$$

Dans ce cas, on note : $u_n \sim_{+\infty} v_n$.

Si v_n est non nulle à partir d'un certain rang, on a :

$$[u_n \sim_{+\infty} v_n] \iff \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \right]$$

1/ Démontrer la :

PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE — $[u_n \sim_{+\infty} v_n] \implies \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \right]$

2/ Déterminer un équivalent simple de u_n , puis en déduire la limite de u_n dans chacun des cas suivants :

$$\text{a/ } u_n = (n^2 - n) \ln \left(1 + \frac{1}{n^3} \right) \quad \text{b/ } u_n = \sqrt{n} \arctan \left(\frac{1}{n} \right) \quad \text{c/ } \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}$$

3/ Calculer les limites suivantes :

$$\text{a/ } \lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin \left(\frac{1}{n} \right) \quad \text{b/ } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \sin \left(\frac{1}{n} \right) \quad \text{c/ } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[n \sin \left(\frac{1}{n} \right) \right]^{n^2}$$

EXERCICE 3. — 1/ Sans regarder votre formulaire, rappeler le DL à l'ordre 2 en 0 de la fonction \cos , puis son DL à l'ordre 4 en 0.

2/ Justifier que : $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

EXERCICE 4. — Déterminer le développement limité à l'ordre n en a des expressions suivantes :

1/ $f(x) = xe^{-x}$ (avec $a = 0$ et $n = 4$)

2/ $f(x) = e^{x^3}$ (avec $a = 0$ et $n = 8$)

3/ $f(x) = (1+x)^{3/2}$ (avec $a = 0$ et $n = 2$)

4/ $f(x) = \ln \left(\frac{1+x^2}{1+x} \right)$ (avec $a = 0$ et $n = 3$)

5/ $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1-x}$ (avec $a = 0$ et $n = 3$)

6/ $f(x) = e^{1-x^2}$ (avec $a = 0$ et $n = 6$)

7/ $f(x) = (1-x)e^{2x}$ (avec $a = 0$ et $n = 3$)

8/ $f(x) = e^{\operatorname{sh} x}$ (avec $a = 0$ et $n = 4$)

9/ $f(x) = e^{\sqrt{1+x}}$ (avec $a = 0$ et $n = 2$)

10/ $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1+x}}$ (avec $a = 0$ et $n = 2$)

EXERCICE 5. — (DL, équivalents et limites). On peut lever des indéterminations en effectuant un DL en 0 à un ordre judicieusement choisi.

Exemples : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ (DL à l'ordre 1 en 0 de \sin) ; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$ (DL à l'ordre 3 en 0 de \sin)

A vous de jouer :

1/ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{3x}$

2/ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln((1+x)(1+2x))}{x}$

3/ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x^2 + 2x}$

4/ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2(x)}$

5/ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 - x + 1) \sin \left(\frac{1}{\pi x^2} \right)$

6/ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3\sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + \sqrt{n}}{2\sqrt{n} + \ln(n+1) + e^{-n}}$

7/ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{\sin(x-a)}$ avec $0 < a < \frac{\pi}{2}$

8/ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{\sin(x-a)}$ où a est un réel > 0 arbitraire

EXERCICE 6. — (Tangentes et positions relatives) Soit f une fonction définie au voisinage de 0, ayant comme DL : $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$. Alors \mathcal{C}_f admet une tangente T au point d'abscisse 0 d'équation $y = a_0 + a_1x$. La position relative de \mathcal{C}_f et de T est donnée **au voisinage de 0** par le signe du premier terme non nul de degré ≥ 2

Exemples : la courbe représentative C_1 de la fonction exponentielle admet une tangente au point d'abscisse 0 d'équation $y = 1 + x$; au voisinage de 0, C_1 est située au-dessus de cette tangente (signe de $x^2/2!$).

La courbe représentative C_2 de la fonction sinus admet une tangente au point d'abscisse 0 d'équation $y = x$; au voisinage de 0, C_2 est située au-dessus à gauche de 0, et en dessous à droite de 0 (signe de $-x^3/3!$).

A vous de jouer : dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation de la tangente T à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0, et préciser la position relative de \mathcal{C}_f et de T au voisinage de 0 :

1/ $f(x) = (2x + 1)e^x$

2/ $f(x) = \frac{\sin(x)}{1+x}$

3/ $f(x) = \ln(1+x+x^2)\sqrt{1+2x}$

EXERCICE 7. — (DL et asymptotes) Par le biais du changement de variable " $X = 1/x$ " dans les DL usuels, on peut obtenir des "DL en $+\infty$ ", appelés développements asymptotiques, permettant d'obtenir entre autres des équations d'asymptotes et des positions relatives au voisinage de $+\infty$.

Par exemple : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\sqrt{x^2+x+1} = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. On en déduit que la courbe représentant $x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$ admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = x + 1/2$, et que \mathcal{C}_f est au-dessus de celle-ci **au voisinage de $+\infty$** .

A vous de jouer ; dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation de l'asymptote à \mathcal{C}_f en $+\infty$, et préciser la position relative de \mathcal{C}_f et de son asymptote :

1/ $f(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

2/ $f(x) = \sqrt{x^2+2x+2}$

EXERCICE 8. — 1/ Soit a un réel > 0 . Justifier que : $a^{1/n} = 1 + \frac{1}{n} \ln(a) + o\left(\frac{1}{n}\right)$

2/ (*) Etablir que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 \sqrt[n]{2} - 2 \sqrt[n]{3}\right)^n = \frac{8}{9}$

EXERCICE 9. — (*) Soit n un entier naturel quelconque, et f la fonction définie sur $] -1; 1[$ par :

$$f : x \mapsto \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$$

Déterminer le développement limité à l'ordre $2n+2$ en 0 de f .

EXERCICE 10. — (Test sur les DL/équivalents)

Chacune des questions ci-dessous comporte une unique réponse correcte.

1) Au voisinage de $+\infty$, un équivalent de $e^{1/n}$ est

- A. n
 B. $1+n$
 C. $1/n$
 D. $1+1/n$

2) Au voisinage de 0, un équivalent de $\frac{\ln(1+x)}{x \sin(x)}$ est

- A. 0
 B. 1
 C. x
 D. $1/x$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \dots$

- A. 0
 B. 1
 C. $+\infty$
 D. n'existe pas.

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \dots$

- A. 0
 B. 1
 C. $+\infty$
 D. n'existe pas.

5) Au voisinage de 0, un équivalent de $(x^3 + x^2) \tan(x)$ est

- A. 0
 B. x^2
 C. x^3
 D. x^4

6) Au voisinage de $+\infty$, un équivalent de $(x^3 + x^2) \arctan(x)$ est

- A. 0
 B. x^2
 C. x^3
 D. x^4

7) Pour se reposer un peu : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = \dots$

- A. 0
 B. 1
 C. $\pi/2$
 D. $+\infty$ ou $-\infty$

8) Au voisinage de $+\infty$, un équivalent de $\frac{x + \sqrt{x}}{x^2 + \ln(x)}$ est

- A. $1/x$
 B. $x/\ln(x)$
 C. $\sqrt{x}/\ln(x)$
 D. $x^{-3/2}$

9) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = \dots$

- A. 0
 B. 1
 C. e^{-2}
 D. Aucune des réponses précédentes n'est exacte.

10) Vous avez répondu de manière aléatoire et indépendante aux 9 questions précédentes. La probabilité que vous ayez exactement 7 bonnes réponses est

- A. $\left(\frac{1}{4}\right)^7 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$
 B. $\frac{36 \times 9}{4^9}$
 C. $\binom{7}{9} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^7$
 D. Aucune des réponses précédentes n'est exacte.

EXERCICE 11. — Déterminer le développement limité à l'ordre n en a des expressions suivantes :

- 1) $f(x) = xe^{-x}$ (avec $a = 0$ et $n = 4$)
- 2) $f(x) = \sin(4x)$ (avec $a = 0$ et $n = 4$)
- 3) $f(x) = \sin x \cos x$ (avec $a = 0$ et $n = 3$)
- 4) $f(x) = \arctan(3x)$ (avec $a = 0$ et $n = 4$)
- 5) $f(x) = x^2\sqrt{1+x}$ (avec $a = 0$ et $n = 4$)
- 6) $f(x) = e^{x^3}$ (avec $a = 0$ et $n = 8$)
- 7) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x+3}}$ (avec $a = 0$ et $n = 2$)
- 8) $f(x) = (1+x)^{3/2}$ (avec $a = 0$ et $n = 2$)
- 9) $f(x) = \tan x$ (avec $a = 0$ et $n = 7$)
- 10) $f(x) = \sqrt[3]{8+x}$ (avec $a = 0$ et $n = 2$)
- 11) $f(x) = \ln\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)$ (avec $a = 0$ et $n = 3$)
- 12) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1-x}$ (avec $a = 0$ et $n = 3$)
- 13) $f(x) = e^{1-x^2}$ (avec $a = 0$ et $n = 6$)
- 14) $f(x) = (1-x)e^{2x}$ (avec $a = 0$ et $n = 3$)
- 15) $f(x) = e^{2+x} \cos x$ (avec $a = 0$ et $n = 4$)
- 16) $f(x) = e^{\operatorname{sh} x}$ (avec $a = 0$ et $n = 4$)
- 17) $f(x) = e^{\sqrt{1+x}}$ (avec $a = 0$ et $n = 2$)
- 18) $f(x) = \ln(e^{\alpha x} + e^{\beta x})$ (avec $a = 0$ et $n = 2$, α et β réels non-nuls)
- 19) $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1+x}}$ (avec $a = 0$ et $n = 2$)
- 20) $f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$ (avec $a = 0$ et $n = 3$)
- 21) $f(x) = \sin(2x - 4x^2) - 2\sin(x - x^2)$ (avec $a = 0$ et $n = 3$)
- 22) $f(x) = \ln(1 + \sin x)$ (avec $a = 0$ et $n = 3$)
- 23) $f(x) = \ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)$ (avec $a = 0$ et $n = 2$)
- 24) $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\arcsin^2 x}$ (avec $a = 0$ et $n = 3$)
- 25) $f(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ (avec $a = 0$ et $n = 3$)
- 26) $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{1-x}\right)$ (avec $a = 0$ et $n = 3$)
- 27) $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ (avec $a = 0$ et $n = 4$)
- 28) $f(x) = \ln(1 + e^x)$ (avec $a = 0$ et $n = 3$)
- 29) $f(x) = \frac{\ln(\cos x)}{x}$ (avec $a = 0$ et $n = 4$)
- 30) $f(x) = e^x \sin x$ (avec $a = 0$ et $n = 4$)
- 31) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ (avec $a = 0$ et $n = 3$)
- 32) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ (avec $a = 0$ et $n = 4$)
- 33) $f(x) = \operatorname{ch}(x^2)$ (avec $a = 0$ et $n = 6$)
- 34) $f(x) = \frac{\arctan x}{\arcsin x}$ (avec $a = 0$ et $n = 4$)
- 35) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x}}{1-x}$ (avec $a = 0$ et $n = 3$)
- 36) $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ (avec $a = 0$ et $n = 4$)
- 37) $f(x) = \frac{1}{1-x^2-x^3}$ (avec $a = 0$ et $n = 7$)
- 38) $f(x) = (\operatorname{ch} x)^{1/x^2}$ (avec $a = 0$ et $n = 2$)
- 39) $f(x) = \cos^3 x$ (avec $a = 0$ et $n = 7$)
- 40) $f(x) = \ln(1 + \sin^2 x)$ (avec $a = 0$ et $n = 8$)
- 41) $f(x) = \operatorname{ch}(1 - \cos x)$ (avec $a = 0$ et $n = 5$)
- 42) $f(x) = (1+x)^{1/x}$ (avec $a = 0$ et $n = 2$)
- 43) $f(x) = e^x$ (avec $a = 1$ et $n = 2$)
- 44) $f(x) = \ln x$ (avec $a = 1$ et $n = 3$)
- 45) $f(x) = \sqrt{x}$ (avec $a = 1$ et $n = 2$)
- 46) $f(x) = \sqrt{x}$ (avec $a = 4$ et $n = 2$)
- 47) $f(x) = \sin x$ (avec $a = \pi$ et $n = 3$)
- 48) $f(x) = \sin x$ (avec $a = \frac{\pi}{2}$ et $n = 3$)
- 49) $f(x) = \cos x$ (avec $a = \frac{\pi}{2}$ et $n = 4$)
- 50) $f(x) = \cos x$ (avec $a = \frac{\pi}{3}$ et $n = 2$)
- 51) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (avec $a = +\infty$ et $n = 5$)
- 52) $f(x) = \ln\left(x \tan\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ (avec $a = +\infty$ et $n = 4$)
- 53) $f(x) = \arctan(2 \sin x)$ (avec $a = \frac{\pi}{3}$ et $n = 3$)
- 54) $f(x) = \tan x$ (avec $a = \frac{\pi}{4}$ et $n = 3$)
- 55) $f(x) = \sqrt{\tan x}$ (avec $a = \frac{\pi}{4}$ et $n = 3$)
- 56) $f(x) = \frac{1}{x}$ (avec $a = 2$ et $n = 4$)
- 57) $f(x) = \int_0^x \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} dt$ (avec $a = 0$ et $n = 5$)