

COLLE 19 – PROGRAMME ET QUESTIONS DE COURS

100% ANALYSE

Les thèmes évalués dans cette colle recouvrent une majorité des notions d'Analyse étudiées depuis le début de l'année (à l'exception du calcul intégral, et des équations différentielles), explicitement :

- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> — Fonctions usuelles : ensemble de déf, dérivabilité/dérivée, sens de variation, limites aux bornes des fonctions usuelles (y compris les “nouvelles” : ch, sh, arccos, arcsin, arctan, partie entière) — Dérivation : définition du nombre dérivé, dérivée et opérations algébriques, dérivée d'une composée, théorèmes généraux sur la dérivabilité, dérivée d'une bijection réciproque — Développements limités à l'ordre 1 : équivalence entre la dérivabilité en a et l'existence d'un DL à l'ordre 1 en a, formulaire des DL1 usuels — Dérivées n-èmes : linéarité de la “n-dérivation”, dérivées n-èmes usuelles (exp, | <ul style="list-style-type: none"> ch, sh, cos, sin, $\frac{1}{1 \pm x}$, x^N), dérivée n-ème d'un produit (formule de Leibniz) — Suites réelles : propriétés générales ; théorèmes de comparaison, d'encadrement, de la limite monotone, des suites adjacentes, des suites extraites — Limites : définition de limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, opérations algébriques sur les limites, comparaison, encadrement, croissances comparées — Continuité : définition, théorèmes généraux sur la continuité, propriété de continuité séquentielle, théorème des valeurs intermédiaires, théorème de la bijection — Applications de la dérivation : théorème de Rolle, théorème et inégalité des accroissements finis, fonctions lipschitziennes |
|---|---|

EXCEPTIONNELLEMENT, cette colle débutera par une question de cours PUIS un exercice choisis dans les listes ci-dessous ; la colle se poursuivra comme d'habitude, par un (des) exercice(s) proposé(s) par l'examineur-trice.

QUESTIONS DE COURS

- **QC 1** : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$
- **QC 2** : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$
- **QC 3** : $f(x) = \frac{1}{1-x}$
 $\implies \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$
- **QC 4** : $\forall x > 0, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$
- **QC5** : Théorème des accroissements finis.

(MINI-)BANQUE D'EXERCICES

Les énoncés détaillés sont donnés page suivante.

- **EC 1** : théorème du point fixe
- **EC 2** : calcul de 2 limites (extrait du DS4)
- **EC 3** : calcul d'une dérivée n -ème (extrait du DS4)
- **EC 4** : étude d'une bijection (extrait du DS5)
- **EC 5** : application d'un calcul de dérivée (extrait du DS5)
- **EC 6** : DL1 en 0 d'une fonction définie par une intégrale (extrait du DS6)
- **EC 7** : application du théorème de la bijection (extrait du DS8)

(MINI-)BANQUE D'EXERCICES — ENONCÉS

► **Exercice de cours 1.** Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On suppose que f est continue sur $[a, b]$, et que : $f([a, b]) \subset [a, b]$.

Alors : $\exists c \in [a, b], f(c) = c$.

► **Exercice de cours 2.** Calculer les limites : $\ell_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \tan\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\ell_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2022}}{2022^x}$

► **Exercice de cours 3.** Pour tout réel x , on pose : $f(x) = (1 - 3x)e^{2x}$. Etablir que pour tout entier naturel n , on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = P_n(x) e^{2x}$$

où P_n est un polynôme dont l'expression est à préciser.

► **Exercice de cours 4.** On pose : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Etablir que la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J que l'on précisera.

► **Exercice de cours 5.** Etablir que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) = \arctan(x)$

► **Exercice de cours 6.** Pour tout réel x , on pose : $\varphi(x) = \int_0^x e^{\cos(t)} dt$.

Justifier brièvement que φ admet un DL₁ en 0, que l'on calculera.

► **Exercice de cours 7.** Montrer que l'équation $\cos(x) = x$ possède une unique solution dans $[0, \pi/2]$.

QUESTION DE COURS 1. — $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$

PREUVE. Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit sur $\mathbb{R}$ une fonction f en posant : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (1+x)^n$ (♠).

D'après la formule du binôme de Newton, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$ (♥).

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on obtient deux expressions pour sa dérivée en utilisant les formules (♠) et (♥).

D'une part : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = n(1+x)^{n-1}$ (◇) Et d'autre part : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1}$ (♣)

En calculant $f'(1)$ à l'aide des formules (◇) et (♣), on obtient : $\boxed{\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1} = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}}$

QUESTION DE COURS 2. — $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

PREUVE. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})}$ ($\spadesuit$).

Au voisinage de 0, on a : $\ln(1+x) = x + o(x)$ (DL usuel). D'où : $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Par suite : $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + o_{+\infty}(1)$. D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$.

On en déduit, avec ($\spadesuit$), que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

QUESTION DE COURS 3. — $f(x) = \frac{1}{1-x} \implies \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

PREUVE. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n) : " \forall x \in I =]1, +\infty[, f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} "$.

L'initialisation (vérification de $P(0)$) consiste à observer que f est continue (de classe $\mathcal{C}^0$) sur I , et à effectuer une vérification immédiate ; passons à l'hérédité.

Supposons que $P(n)$ soit vraie pour un certain entier naturel n . Alors : $\forall x \in I, f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

En particulier $f^{(n)}$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall x \in I, f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = -\frac{n!(n+1)(1-x)^n}{(1-x)^{2n+2}} = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

Ce qui assure que $P(n+1)$ est vraie, établit l'hérédité, et achève cette récurrence.

QUESTION DE COURS 4. — $\forall x > 0, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

PREUVE. On pose : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (théorèmes généraux), et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1/x^2}{1+(1/x^2)} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2+1} = 0.$$

Il s'ensuit que f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme de plus : $f(1) = 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2}$, on peut conclure :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Remarque. Par un raisonnement analogue (ou par un argument de parité) :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

QUESTION DE COURS 5. — Théorème des accroissements finis. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur $]a, b[$, continue sur $[a, b]$, alors : $\exists c \in]a, b[$, $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

PREUVE. On définit une fonction g sur $[a, b]$ en posant : $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$

D'après les théorèmes généraux sur la continuité et la dérivabilité, la fonction g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

En outre $g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a)$ d'où $g(a) = f(a)$; et $g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a)$ d'où : $g(b) = f(a)$.

La fonction g vérifie les hypothèses du théorème de Rolle, dont l'application donne : $\exists c \in]a, b[$, $g'(c) = 0$.

Or : $\forall x \in]a, b[$, $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

On en déduit : $\exists c \in]a, b[$, $f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$. D'où finalement : $\boxed{\exists c \in]a, b[$, $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$.

EXERCICE DE COURS 1. — Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On suppose que f est continue sur $[a, b]$, et que : $f([a, b]) \subset [a, b]$.

Alors : $\exists c \in [a, b]$, $f(c) = c$

CORRIGÉ. Posons : $\forall x \in [a, b]$, $g(x) = f(x) - x$.

► Par hypothèse et selon les TG : $g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

► Puisque par hypothèse $f([a, b]) \subset [a, b]$, on a en particulier : $f(a) \geq a$ et $f(b) \leq b$.

Il s'ensuit que $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires : $\exists c \in [a, b]$, $g(c) = 0$.

Conclusion. $\exists c \in [a, b]$, $f(c) = c$

EXERCICE DE COURS 2. — Calculer les limites : $\ell_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \tan\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\ell_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2022}}{2022^x}$

CORRIGÉ. ► Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $\tan\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

D'où : $n^2 \tan\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 + o_{+\infty}(1)$. **Conclusion.** $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \tan\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1$.

► Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\frac{x^{2022}}{2022^x} = \frac{e^{2022 \ln(x)}}{e^{x \ln(2022)}} = e^{2022 \ln(x) - x \ln(2022)} = e^{x \left(2022 \frac{\ln(x)}{x} - \ln(2022)\right)}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ (croissances comparées), on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2022 \frac{\ln(x)}{x} - \ln(2022) = -\ln(2022)$.

On en déduit que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2022 \frac{\ln(x)}{x} - \ln(2022) \right) = -\infty$.

Conclusion. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2022}}{2022^x} = 0$

EXERCICE DE COURS 3. — Pour tout réel x , on pose : $f(x) = (1 - 3x)e^{2x}$. Etablir que pour tout entier naturel n , on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = P_n(x) e^{2x}$$

CORRIGÉ. Posons pour tout réel x : $g(x) = (1 - 3x)$ et $h(x) = e^{2x}$. Les fonctions g et h sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (théorèmes généraux).

On peut donc appliquer la formule de Leibnitz pour obtenir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x)$$

Observons à présent que pour tout réel x on a :

$$\blacktriangleright g^{(0)}(x) = 1 - 3x ; g^{(1)}(x) = -3 ; \text{ et pour tout entier } k \geq 2 : g^{(k)}(x) = 0 ;$$

$$\blacktriangleright \text{ pour tout entier naturel } N : h^{(N)}(x) = 2^N e^{2x}.$$

On en déduit que pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ on a :

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x) = (1 - 3x) 2^n e^{2x} + n(-3) 2^{n-1} e^{2x} = (-3 \times 2^n x + 2^n - 3 \times 2^{n-1} n) e^{2x}$$

Conclusion. En résumé, pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ on a :

$$f^{(n)}(x) = P_n(x) e^{2x} \quad \text{avec : } P_n(x) = -3 \times 2^n x + 2^n - 3 \times 2^{n-1} n$$

EXERCICE DE COURS 4. — On pose : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Etablir que la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J que l'on précisera.

CORRIGÉ. Selon les théorèmes généraux, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x on a :

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} = \frac{1}{(x^2 + 1)^{3/2}}$$

En particulier, f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Puisque la fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $J =] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [$.

En outre, on a pour tout réel x strictement positif :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \quad \text{D'où : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

La fonction f étant impaire, on en déduit que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$.

Conclusion. La fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $] -1, 1[$.

EXERCICE DE COURS 5. — Etablir que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \arctan(x)$

CORRIGÉ. D'après l'énoncé, on a : $g = \arcsin \circ f$, où f désigne la fonction de l'exercice précédent. Puisque f est à valeurs dans $] -1, 1[$,* cette composée est dérivable sur $\mathbb{R}$ selon les théorèmes généraux.

Pour tout réel x on a :

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} = \frac{(x^2+1)^{-3/2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+1}}} = \frac{(x^2+1)^{-3/2}}{\sqrt{\frac{1}{x^2+1}}} = \frac{(x^2+1)^{-3/2}}{(x^2+1)^{-1/2}} = (x^2+1)^{-1} = \frac{1}{x^2+1}$$

Par suite : $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \arctan(x) + k$. Puisque $g(0) = 0 = \arctan(0)$, on peut conclure :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \arctan(x)$$

EXERCICE DE COURS 6. — Pour tout réel x , on pose : $\varphi(x) = \int_0^x e^{\cos(t)} dt$.

Justifier brièvement que φ admet un DL₁ en 0, que l'on calculera.

CORRIGÉ. Par construction, la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x on a : $\varphi'(x) = e^{\cos(x)}$.

La fonction φ admet donc un DL à l'ordre 1 en 0, donné par la formule bien connue :

$$\varphi(x) = \underbrace{\varphi(0)}_{=0} + x \underbrace{\varphi'(0)}_{=1} + o(x) \quad \text{soit :} \quad \varphi(x) = x + o(x)$$

EXERCICE DE COURS 7. — Montrer que l'équation $\cos(x) = x$ possède une unique solution dans $[0, \pi/2]$.

CORRIGÉ. On pose $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et on définit une fonction f sur I en posant :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \cos(x) - x$$

La fonction f est continue et strictement décroissante sur I .[†] Elle réalise donc une bijection de I vers $f(I) = \left[-\frac{\pi}{2}, 1\right]$.

Puisque $0 \in f(I)$, il admet un unique antécédent par f dans I .

Conclusion. Il existe un unique réel $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = 0$. Par suite, l'équation $\cos(x) = x$ possède une unique solution α dans $[0, \pi/2]$.

*. Et que arcsin est dérivable sur $[-1, 1]$.

†. La stricte décroissance de f sur I est aisée à justifier.