Colle 20 – Questions de cours

Question de cours 1. — Exercice. Calcul de $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)}$.

Ecrivons un DL à l'ordre 4 en 0 de $\sin^2(x)$.

D'après le formulaire : $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$. Par suite : $\sin^2(x) = x^2 - \dfrac{x^4}{3} + o(x^4)$.

On en déduit que : $\displaystyle \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)} = \frac{1}{x^2}\left[1 - \frac{1}{1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)}\right]$ $\quad (\spadesuit)$

Par ailleurs, d'après le formulaire encore : $\dfrac{1}{1-X} = 1 + X + o(X)$.

On en déduit que : $\displaystyle \frac{1}{1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)} = 1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)$. D'où : $\displaystyle 1 - \frac{1}{1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)} = -\frac{x^2}{3} + o(x^2)$ $\quad (\clubsuit)$.

D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$: $\displaystyle \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)}\right] \sim_0 \frac{1}{x^2} \times \left(-\frac{x^2}{3}\right)$. Donc : $\boxed{\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{3}}$

Question de cours 2. — Exercice. Calcul de $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{\sin(x-a)}$ avec $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$.

On effectue un **retour à l'origine**, càd un changement de variable permettant de se ramener à un calcul de limite en 0, en posant :

$$X = x - a \qquad (\text{donc } x = X + a)$$

Moyennant ce changement de variable, l'énoncé devient :

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{\sin(x-a)} = \lim_{X \longrightarrow 0} \frac{\sin(X+a) - \sin(a)}{\sin(X)}$$

On a déjà : $\sin(X) \sim_0 X \qquad (\spadesuit)$

Par ailleurs :

$$\sin(X+a) - \sin(a) = \sin(X)\cos(a) + \sin(a)\cos(X) - \sin(a) = \sin(X)\cos(a) + \sin(a)\left(\cos(X) - 1\right)$$

Donc : $\sin(X+a) - \sin(a) = \cos(a)X + o(X)$ d'où : $\sin(X+a) - \sin(a) \sim_0 \cos(a)X \quad (\clubsuit)$.

D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$: $\displaystyle \frac{\sin(X+a) - \sin(a)}{\sin(X)} \sim_0 \cos(a)$. Par suite : $\boxed{\displaystyle\lim_{x \longrightarrow a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{\sin(x-a)} = \cos(a)}$

Question de cours 3. — **Exercice**. Equation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abcisse 0, et position relative de $\mathscr{C}_f$ et de T au voisinage de 0, avec $f(x) = \ln(1+x+x^2)\sqrt{1+2x}$

Soit x un réel au voisinage de 0.[*]

D'une part : $\sqrt{1+2x} = (1+2x)^{1/2} = 1 + x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$

D'autre part : $\ln(1+x+x^2) = (x+x^2) - \dfrac{(x+x^2)^2}{2} + o(x^2) = x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$

Donc : $f(x) = \left(1 + x - \dfrac{x^2}{2}\right)\left(x + \dfrac{x^2}{2}\right) + o(x^2) = x + \dfrac{x^2}{2} + x^2 + o(x^2)$ D'où : $f(x) = x + \dfrac{3x^2}{2} + o(x^2)$

On en déduit que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ admet une tangente au point d'abcisse 0 d'équation $y = x$; au voisinage de 0, $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de cette tangente (signe de $3x^2/2$).

Question de cours 4. — **Exercice**. Equation de l'asymptote à la courbe représentative de $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \sqrt{x^2+x+1}$ au voisinage de $+\infty$.

Soit x un réel strictement positif. On a : $\sqrt{x^2+x+1} = x\sqrt{1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}$.

Par ailleurs, pour tout réel $X > -1$, on a : $\sqrt{1+X} = 1 + \dfrac{X}{2} - \dfrac{X^2}{8} + o(X^2)$.

On pose : $X = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ (et on peut observer que X tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$).

On obtient alors :

$$\sqrt{x^2+x+1} = x\left[1 + \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{2} - \frac{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2}{8} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] = x\left[1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$= x\left[1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$$

On en déduit que la courbe représentative de f admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote d'équation $y = x + \dfrac{1}{2}$; et que la courbe est située au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$ (signe de $\dfrac{3}{8x}$).

Question de cours 5. — **Exercice**. Calculs de $\ell_1 = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $\ell_2 = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ et $\ell_3 = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\,; \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \mathrm{e}^{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \quad \text{et} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} = \mathrm{e}^{\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

[*]. Par exemple tel que $|x| < 1/2$.

Or : $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n}$. On en déduit que :

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} 1\,; \quad n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} n \quad \text{et} \quad \sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1\,; \quad \lim_{n\to+\infty} n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$$

Conclusion. $\ell_1 = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}\,; \quad \ell_2 = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = +\infty \quad \text{et } \ell_3 = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} = 1$

Question de cours 6. — Application de la formule de Taylor 1. Application de la formule de Taylor 1. DL en 0 à l'ordre $2n$ de cos.

Soit n un entier naturel quelconque. La fonction cos étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, elle admet en particulier un DL à l'ordre $2n$ en 0, qui est donné par la formule de Taylor :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} x^k + o\left(x^{2n}\right)$$

En séparant dans la partie régulière les termes de rangs pairs et ceux de rangs impairs, on obtient :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o\left(x^{2n}\right)$$

Or la fonction cos étant paire, toutes ses dérivées d'ordre impair sont impaires. Il s'ensuit que : $\forall\, k \in [\![\, 0, n-1\,]\!],\ \cos^{(2k+1)}(0) = 0$. Par suite :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + o\left(x^{2n}\right)$$

En outre, pour tout $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, on a : $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$. Il s'ensuit que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \cos^{(2k)}(0) = \cos(k\pi) = (-1)^k$$

Finalement : $\forall\,(x,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N},\ \cos(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n}\right)$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right)$$

Question de cours 7. — Application de la formule de Taylor 2. DL en 0 à un ordre n arbitraire de $f : x \longmapsto 1/(1-x)$. En déduire le DL en 0 à tout ordre de la fonction arctangente.

Preuve. Notons $I = \,]-1,1[$. La fonction $f : x \longmapsto 1/(1-x)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I d'après les théorèmes généraux. Le but est de prouver que f admet une dérivée à tout ordre, et que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in I,\ f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

On note $P(n)$ la propriété : "$\forall\, x \in I,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$", et on établit que $P(n)$ est vraie par récurrence sur n.

L'initialisation est immédiate. Supposons donc $P(n)$ établie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$. Alors $f^{(n)}$ est dérivable sur I ("HR+TG") et :

$$\forall\, x \in I,\ f^{(n+1)}(x) = (f^n)'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\right) = \frac{n! \times (n+1)}{(1-x)^{n+2}} = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

Ce qui établit l'hérédité et achève cette récurrence. On en déduit en particulier que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = n!$.

En conjuguant ce résultat avec la formule de Taylor, on en déduit que f admet en 0 un DL à tout ordre, et explicitement :

$$\boxed{\forall\, x \in I,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{1-x} = \left[\sum_{x=0}^{n} x^k\right] + o\left(x^n\right)}$$

Par changement de variable $x \mapsto (-x^2)$: $\boxed{\forall\, x \in I,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{1+x^2} = \left[\displaystyle\sum_{x=0}^{n} (-1)^k\, x^{2k}\right] + o\left(x^{2n}\right)}$

Par intégration (et en notant que $\arctan(0) = 0$) :

$$\boxed{\forall\, x \in I,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \arctan(x) = \left[\sum_{x=0}^{n} \frac{(-1)^k\, x^{2k+1}}{2k+1}\right] + o\left(x^{2n+1}\right)}$$

Question de cours 8. — Théorème (FORMULE DE TAYLOR-YOUNG) : si $f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$, alors f admet un DL à l'ordre n en a, explicitement :

$$\forall\, x \in I,\quad f(x) = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] + o\left((x-a)^n\right)$$

Preuve. Posons pour tout entier naturel n

$$\mathscr{P}(n) : \qquad \text{"Si } f \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R}) \text{, alors } \forall\, x \in I,\ f(x) = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] + o\left((x-a)^n\right)\text{"}$$

et prouvons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n par récurrence.

➤ Initialisation (pour $n = 0$) : supposons que $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$, c'est-à-dire que f est continue sur I. Pour tout réel a de I, on peut judicieusement écrire :

$$\forall\, x \in I,\ f(x) = f(a) + \underbrace{(f(x) - f(a))}_{\varepsilon(x)}$$

On pose : $\varepsilon(x) = (f(x) - f(a))$. Comme f est continue en a par hypothèse, on a : $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$. D'où : $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \varepsilon(x) = 0$. On a donc obtenu, sous l'hypothèse que $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$:

$$\forall\, x \in I,\ f(x) = f(a) + \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \longrightarrow a} \varepsilon(x) = 0, \text{ càd : } \forall\, x \in I,\ f(x) = f(a) + o_a(1)$$

Ce qui prouve que la propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

➤ Hérédité : supposons la propriété $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

Soit que $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$. On observe que sous cette hypothèse on a : $f' \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$. On peut alors légitimement appliquer l'hypothèse de récurrence à la fonction f' pour affirmer que pour tout réel $a \in I$ on a :

$$\forall\, t \in I,\ f'(t) = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{f'^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right] + o_a\left((t-a)^n\right)$$

Puis, pour un x fixé dans I, on intègre cette relation entre a et x pour obtenir (par linéarité de l'intégrale) :

$$\forall\, x \in I,\ \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!} \int_a^x (t-a)^k \,\mathrm{d}t\right] + \int_a^x o_a\left((t-a)^n\right)\mathrm{d}t$$

Soit :

$$\forall\, x \in I,\ f(x) - f(a) = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!} \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1}\right] + \int_a^x o_a\left((t-a)^n\right)\mathrm{d}t$$

D'où : $\forall\, x \in I,\ f(x) = f(a) + \left[\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}\ (x-a)^{k+1}\right] + \displaystyle\int_a^x o_a\left((t-a)^n\right)\mathrm{d}t$

Et finalement :

$$\forall\, x \in I,\ f(x) = \left[\sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\ (x-a)^k\right] + \underbrace{\int_a^x o_a\left((t-a)^n\right)\mathrm{d}t}_{=o_a\left((x-a)^{n+1}\right)}$$

Récurrence établie.

— Fin de la question de cours † —

†. On admet donc que : $\displaystyle\int_a^x o_a\left((t-a)^n\right)\mathrm{d}t = o_a\left((x-a)^{n+1}\right)$

➤ **La partie manquante de la preuve précédente (non-exigible en colle)**.

Pour conclure, il "suffit" de montrer que le terme $\displaystyle\int_a^x o_a\left((t-a)^n\right)\mathrm{d}t$ est négligeable devant $(x-a)^{n+1}$ au voisinage de a, c'est-à-dire qu'on peut l'écrire $(x-a)^{n+1}\varphi(x)$ avec $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow a}\varphi(x)=0$.

On commence par noter que : $o_a\left((t-a)^n\right)=(t-a)^n\varepsilon(t)$ avec $\displaystyle\lim_{t\to a}\varepsilon(t)=0$ (définition de négligeabilité).

Puis on observe que pour tout réel $x\neq a$: $\displaystyle\int_a^x o_a\left((t-a)^n\right)\mathrm{d}t=(x-a)^{n+1}\times\frac{\displaystyle\int_a^x (t-a)^n\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t}{(x-a)^{n+1}}$.

Posons alors : $\varphi(x)=\dfrac{\displaystyle\int_a^x (t-a)^n\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t}{(x-a)^{n+1}}$, et montrons que $\varphi(x)$ tend vers 0 quand x tend vers a, ce que l'on fait en revenant à la définition de limite.

Fixons $\beta>0$. Puisque $\displaystyle\lim_{t\longrightarrow a}\varepsilon(t)=0$, il existe un réel α tel que $|t-a|<\alpha\Longrightarrow|\varepsilon(t)|<\beta$. Ainsi :

$$|x-a|<\alpha\Longrightarrow|\varphi(x)|<\frac{1}{|x-a|^{n+1}}\times\beta\int_a^x|t-a|^n\,\mathrm{d}t\quad\text{d'où}\quad|x-a|<\alpha\Longrightarrow|\varphi(x)|<\frac{\beta}{n+1}.$$

En particulier : $|x-a|<\alpha\Longrightarrow|\varphi(x)|<\beta$, et on a donc établi que :

$$\forall\,\beta>0,\ \exists\,\alpha>0,\ |x-a|<\alpha\Longrightarrow|\varphi(x)|<\beta$$

Ce qui signifie que $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow a}\varphi(x)=0$, et donc : $\displaystyle\int_a^x o_a\left((t-a)^n\right)\mathrm{d}t=o_a\left((x-a)^{n+1}\right)$.

Finalement, on a : $\forall\,x\in\ I,\ f(x)=\left[\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k\right]+o_a\left((x-a)^{n+1}\right)$, ce qui prouve que la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, montre l'hérédité de la propriété, et complète cette preuve.