

## EXERCICES 19 — POLYNÔMES

**EXERCICE 1.** — (Degré et coefficient dominant)1/ Calculer le degré et le coefficient dominant de  $P = (1 + X)^2 + (1 - X)^2$ On a :  $P = 2X^2 + 2$ . D'où :  $\deg(P) = 2$  et  $\text{cd}(P) = 2$ .2/ Calculer le degré et le coefficient dominant de  $P = (1 + X)^3 + (1 - X)^3$ On a :  $P = 6X^2 + 2$ . D'où :  $\deg(P) = 2$  et  $\text{cd}(P) = 6$ .3/ Soit  $n$  un entier naturel non nul. Calculer le degré et le coefficient dominant de  $P = (1 + X)^n + (1 - X)^n$ On a :  $P = X^n + nX^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} X^k$  et  $Q = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} nX^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} (-1)^k X^k$ .Lorsque  $n$  est pair, on a :  $P + Q = 2X^n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (1 + (-1)^k) X^k$ . D'où :  $\deg(P + Q) = n$  et  $\text{cd}(P + Q) = 2$ .Lorsque  $n$  est impair, on a :  $P + Q = 2nX^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} (1 + (-1)^k) X^k$ . D'où :  $\deg(P + Q) = n - 1$  et  $\text{cd}(P + Q) = 2n$ .**EXERCICE 2.** — (Utilisation du degré) Soit  $n$  un entier naturel.Prouver qu'il n'existe aucun polynôme  $P$  tel que :  $P^2 = X(X^{2n} + 1)$ 

Le polynôme nul n'est clairement pas solution de l'équation.

Supposons qu'il existe un polynôme non nul  $P$  solution. Notons alors :  $m = \deg(P) \in \mathbb{N}$ .Puisque  $P$  est solution de l'équation, on a :  $\deg(P^2) = \deg(X(X^{2n} + 1))$ .D'où :  $2m = 2n + 1$ , ce qui est assez clairement absurde, d'où la conclusion.**EXERCICE 3.** — Déterminer tous les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  solutions de l'équation :

(E) 
$$P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$$

Le polynôme nul est solution de l'équation.

Supposons à présent  $P$  non nul, et notons  $n = \deg P$ .Si  $P$  est solution de l'équation, alors :  $\deg P(X^2) = \deg (X^2 + 1)P(X)$  soit :  $2n = n + 2$  d'où  $n = 2$ .On cherche donc  $P$  sous la forme d'un polynôme de degré 2 :  $P = aX^2 + bX + c$  avec  $a \neq 0$ .Alors :  $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X) \iff aX^4 + bX^2 + c = aX^4 + bX^3 + (c + a)X^2 + bX + c$ .Par identification, on en déduit que  $b = 0$  et  $c = -a$ .Donc :  $P$  non nul solution  $\implies \exists a \in \mathbb{K}^*, P = aX^2 - a$ . La réciproque est une vérification immédiate.

Puisque le polynôme nul est également solution, on peut conclure.

**Conclusion.** L'ensemble des solutions de l'équation est  $\{a(X^2 - 1), a \in \mathbb{K}\}$ .

**EXERCICE 4.** — (Utilisation du degré et du coefficient dominant) Déterminer tous les polynômes  $P$  tels que

$$P^2 = 4P$$

Le polynôme nul est clairement solution de l'équation.

Supposons à présent qu'il existe un polynôme non nul  $P$  solution, et notons :  $n = \deg(P) \in \mathbb{N}$ .

Puisque  $P$  est solution de l'équation, on a :  $\deg(P^2) = \deg(4P)$ .

D'où :  $2n = n$ , d'où  $n = 0$ . On en déduit que  $P$  est constant (non nul). D'où :  $P = 4$ .

**Conclusion.** Il existe exactement deux polynômes  $P$  tels que  $P^2 = 4P$  : les polynômes constants  $\tilde{0}$  et  $\tilde{4}$ .

**EXERCICE 5.** — (Utilisation du degré et du coefficient dominant) Déterminer tous les polynômes  $P$  tels que

$$P^3 = X^2P$$

Le polynôme nul est clairement solution de l'équation.

Soit  $P$  un polynôme non nul solution de l'équation. Notons :  $\deg P = n \in \mathbb{N}$ .

Par hypothèse :  $\deg(P^3) = \deg(X^2P) \iff 3n = 2 + n \iff n = 1$ .

On en déduit que si  $P$  (non nul) est solution, alors il est nécessairement de degré 1.

Ceci nous conduit à rechercher les polynômes  $P$  (non nuls) solutions sous la forme :  $P = aX + b$  (avec  $a$  et  $b$  scalaires,  $a \neq 0$ ).

On obtient alors :  $P^3 = X^2P \iff (aX + b)^3 = X^2(aX + b) \iff a^3X^3 + 3a^2bX^2 + 3ab^2X + b^3 = aX^3 + bX^2$ .

Par identification (considérer les termes constants de part et d'autre), on en déduit que  $b = 0$  et  $a^3 = a$ . La deuxième équation est équivalente à  $a = 0$  (exclus par hyp) ou  $a = 1$  ou  $a = -1$ .

On en déduit qu'il existe exactement deux polynômes non nuls solutions :  $X$  et  $-X$ .

**Conclusion.** L'équation  $P^3 = X^2P$  possède exactement 3 solutions dans  $\mathbb{K}[X]$ , qui sont :  $\tilde{0}$ ,  $X$  et  $-X$ .

**EXERCICE 6.** — (Division euclidienne). Effectuer la division euclidienne de  $A = 5X + 7$  par  $B = X^3 + 2$ , puis celle de  $B$  par  $A$ .

Puisque  $\deg(A) < \deg(B)$ , la première division euclidienne est triviale :  $5X + 7 = (X^3 + 2) \times \underbrace{\tilde{0}}_{\text{quotient}} + \underbrace{5X + 7}_{\text{reste}}$ .

Pour la seconde, on obtient :  $X^3 + 2 = (5X + 7) \underbrace{\left( \frac{1}{5}X^2 - \frac{7}{25}X + \frac{49}{125} \right)}_{\text{quotient}} - \underbrace{\frac{93}{125}}_{\text{reste}}$

**EXERCICE 7.** — (Division euclidienne). Effectuer la division euclidienne de  $A = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$  par  $B = X^2 - 3X + 1$ .

On a :  $2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6 = (X^2 - 3X + 1) \underbrace{(2X^2 + 3X + 11)}_{\text{quotient}} + \underbrace{25X - 5}_{\text{reste}}$

**EXERCICE 8.** — (**Division euclidienne**). A quelle condition le polynôme  $X^4 + aX^2 + bX + c$  est-il divisible par  $X^2 + X + 1$  ?

D'après le cours, le polynôme  $A = X^4 + aX^2 + bX + c$  est divisible par  $B = X^2 + X + 1$  si et seulement si le reste dans la division euclidienne de  $A$  par  $B$  est nul.

On effectue donc la division euclidienne de  $A$  par  $B$ .

$$\text{Ce faisant on obtient : } X^4 + aX^2 + bX + c = (X^2 + X + 1) \underbrace{(X^2 - X + a)}_{\text{quotient}} + \underbrace{(b - a + 1)X + c - a}_{\text{reste}}$$

Le reste dans la division euclidienne de  $A$  par  $B$  est donc :  $R = (b - a + 1)X + c - a$ .

$$\text{On en déduit que : } R = \tilde{0} \iff \begin{cases} b - a + 1 = 0 \\ c - a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = a - 1 \\ c = a \end{cases}$$

**Conclusion.** Le polynôme  $A = X^4 + aX^2 + bX + c$  est divisible par  $B = X^2 + X + 1$  si et seulement si  $c = a$  et  $b = a - 1$ .

**EXERCICE 9.** — (**Inversibles de  $\mathbb{K}[X]$** ) Soit  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Déterminer  $\mathbb{K}[X]^*$ .

**Seconde formulation.** Quels sont les polynômes de l'anneau  $\mathbb{K}[X]$  inversibles pour la multiplication ?

**Troisième formulation.** Déterminer tous les polynômes  $P \in \mathbb{K}[X]$  pour lesquels il existe un polynôme  $Q \in \mathbb{K}[X]$  tels que  $PQ = 1$ .

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]^*$ . Alors il existe un polynôme  $Q \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $PQ = 1$ . On en déduit que  $\deg(PQ) = 0$ .

D'où :  $\deg P + \deg Q = 0$ . Ce qui implique que :  $\deg P = 0$  (et  $\deg Q = 0$ ). Donc  $P \in \mathbb{K}^*$ .

Ce raisonnement prouve l'inclusion :  $\mathbb{K}[X]^* \subset \mathbb{K}^*$ .

L'inclusion réciproque est triviale.

**Conclusion.**  $\mathbb{K}[X]^* = \mathbb{K}^*$ . Les polynômes inversibles pour la multiplication dans  $\mathbb{K}[X]$  sont exactement les polynômes constants non nuls.

**EXERCICE 10.** — (**Utilisation du coefficient dominant**) Déterminer tous les polynômes  $P$  tels que

$$P = XP'$$

où  $P'$  désigne le polynôme dérivé de  $P$ .

Il est assez clair que le polynôme nul est solution, et que tout polynôme constant non nul ne l'est pas.

A partir de maintenant, on pourra donc supposer que  $P$  est un polynôme non constant, c-à-d de degré  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Si un tel polynôme  $P$  est solution, alors :  $P = XP'$ .

La comparaison des degrés ne donne ici pas d'information décisive.

En effet, on a  $\deg P = n$  et  $\deg XP' = \deg X + \deg P' = 1 + (n - 1) = n$ .

L'idée est donc de comparer les coefficients dominants de chaque terme.

On a :  $\text{cd}(XP') = \text{cd}(X) \times \text{cd}(P') = 1 \times n\text{cd}(P)$ .

Par suite :  $P = XP' \implies \text{cd}(P) = n\text{cd}(P)$ . D'où  $n = 1$  (puisque  $\text{cd}(P) \neq 0$  par définition de coefficient dominant).

**Conclusion intermédiaire.** Si un polynôme  $P$  non constant est solution, alors il est de degré 1.

On recherche donc les solutions sous la forme :  $P = aX + b$ , avec  $a$  et  $b$  scalaires,  $a$  non nul. Un tel polynôme est solution ssi :

$$P = XP' \iff ax + b = aX \iff b = 0$$

L'ensemble des polynômes de degré 1 solutions de l'équation sont donc les polynômes  $aX$  avec  $a$  scalaire non nul.

Puisque l'on a déjà observé que le polynôme nul est solution, on peut conclure :

**L'ensemble des solutions de  $P = XP'$  est  $\{aX, a \in \mathbb{K}\}$ .**

**EXERCICE 11.** — (**Division euclidienne**) Le reste de la division euclidienne d'un polynôme  $P$  par  $(X - 2)$  est 3 et par  $(X + 2)$  est 2. Quel est le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X^2 - 4)$ ? D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple  $(Q, R)$  tel que :

$$P = (X^2 - 4)Q + R \quad (\clubsuit) \quad \text{et} \quad \deg R < 2$$

La condition sur le degré de  $R$  entraîne que :  $\exists(a, b) \in \mathbb{K}^2, R = aX + b \quad (\spadesuit)$ .

Le but de l'exercice est donc de déterminer  $a$  et  $b$ .

A cette fin, on exploite les hypothèses données dans l'énoncé.

Puisque le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - 2)$  est 3, il existe un polynôme  $Q_1$  tel que :

$$P = (X - 2)Q_1 + 3$$

On en déduit (évaluation en 2) que :  $P(2) = 3$ .

De même, puisque le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X + 2)$  est 2, il existe un polynôme  $Q_2$  tel que :

$$P = (X + 2)Q_2 + 2$$

On en déduit (évaluation en  $-2$ ) que :  $P(-2) = 2$ .

Par ailleurs, d'après  $(\clubsuit)$  :  $P(2) = R(2)$  et  $P(-2) = R(-2)$ .

On en déduit, d'après  $(\spadesuit)$  que :  $P(2) = 2a + b$  et  $P(-2) = -2a + b$ .

$$\text{Donc : } \begin{cases} 2a + b = 3 \\ -2a + b = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1/4 \\ b = 5/2 \end{cases}$$

**Conclusion.** Le reste dans la division euclidienne de  $P$  par  $(X^2 - 4)$  est le  $R = \frac{1}{4}X + \frac{5}{2}$ .

**EXERCICE 12.** — (**Division euclidienne**). Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux éléments distincts de  $\mathbb{K}$  (avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ), et soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{K}[X]$ .

Déterminer le reste dans la division euclidienne de  $P$  par  $Q = (X - \alpha)(X - \beta)$ .

D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple  $(S, R)$  de polynômes tel que :  $P = QS + R$  et  $\deg(R) < 2$ .

Il s'ensuit que le reste  $R$  est de degré au plus 1, et qu'il existe donc deux scalaires tels que  $R = aX + b$ . On a donc :

$$P = (X - \alpha)(X - \beta)S + aX + b \quad (\spadesuit)$$

En évaluant la relation  $(\spadesuit)$  successivement en  $\alpha$  et en  $\beta$  (qui sont distincts par hypothèse), on obtient :

$$\begin{cases} P(\alpha) = a\alpha + b \\ P(\beta) = a\beta + b \end{cases}$$

La résolution (aisée) de ce système donne :

$$\begin{cases} a = \frac{P(\alpha) - P(\beta)}{\alpha - \beta} \\ b = \frac{\beta P(\alpha) - \alpha P(\beta)}{\beta - \alpha} \end{cases}$$

**Conclusion.** Si  $\alpha \neq \beta$ , le reste dans la division euclidienne d'un polynôme  $P$  de  $\mathbb{K}[X]$  par  $(X - \alpha)(X - \beta)$  est

$$R = \frac{P(\alpha) - P(\beta)}{\alpha - \beta} X + \frac{\beta P(\alpha) - \alpha P(\beta)}{\beta - \alpha}$$

**EXERCICE 13.** — (**Division euclidienne, bis**). Soit  $\alpha$  un élément de  $\mathbb{K}$  (avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ), et soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{K}[X]$ .

Déterminer le reste dans la division euclidienne de  $P$  par  $Q = (X - \alpha)^2$ .

D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple  $(S, R)$  de polynômes tel que :  $P = QS + R$  et  $\deg(R) < 2$ .

Il s'ensuit que le reste  $R$  est de degré au plus 1, et qu'il existe donc deux scalaires tels que  $R = aX + b$ . On a donc :

$$P = (X - \alpha)^2 S + aX + b \quad (\spadesuit)$$

Comme dans l'exo précédent, l'évaluation en  $\alpha$  de la relation  $(\spadesuit)$  donne :  $P(\alpha) = a\alpha + b$ .

Puis on dérive  $(\spadesuit)$  pour obtenir :  $P' = 2(X - \alpha)S + (X - \alpha)^2 S' + a$ , dont l'évaluation en  $\alpha$  donne :  $P'(\alpha) = a$ .

En résumé, on a le système :

$$\begin{cases} P(\alpha) = a\alpha + b \\ P'(\alpha) = a \end{cases}$$

La résolution (encore plus aisée que dans l'exo précédent) de ce système donne :

$$\begin{cases} a = P'(\alpha) \\ b = P(\alpha) - \alpha P'(\alpha) \end{cases}$$

**Conclusion.** Le reste dans la division euclidienne d'un polynôme  $P$  de  $\mathbb{K}[X]$  par  $(X - \alpha)^2$  est :

$$R = P'(\alpha)X + P(\alpha) - \alpha P'(\alpha)$$

**EXERCICE 14.** — Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer le reste dans la division euclidienne de  $X^n$  par  $B = X^2 - 3X + 2$ .

D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple  $(Q, R)$  de polynômes tel que :  $X^n = BQ + R$  et  $\deg(R) < 2$ .

Il s'ensuit que le reste  $R$  est de degré au plus 1, et qu'il existe donc deux scalaires tels que  $R = aX + b$ . On a donc :

$$X^n = (X^2 - 3X + 2)Q + aX + b \quad (\spadesuit)$$

Or :  $X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$ .

Donc :  $X^n = (X - 1)(X - 2)Q + aX + b$ .

En évaluant en 1 et en 2 cette relation, on obtient : 
$$\begin{cases} 1 = a + b \\ 2^n = 2a + b \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2^n - 1 \\ b = 2 - 2^n \end{cases}$$

**Conclusion.** Le reste dans la division euclidienne de  $X^n$  par  $X^2 - 3X + 2$  est :

$$R = (2^n - 1)X + 2 - 2^n$$

**EXERCICE 15.** — Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  telle que :  $A^2 - 3A + 2I_n = 0_{M_n(\mathbb{K})}$ .

Etablir que pour tout entier naturel  $N$ , la matrice  $A^N$  est combinaison linéaire de  $A$  et de  $I_n$  (c'est à dire qu'il existe deux scalaires  $a_N$  et  $b_N$  tels que :  $A^N = a_N A + b_N I_n$ ).

Soit  $N$  un entier naturel. D'après la question précédente :  $X^N = (X^2 - 3X + 2)Q + (2^N - 1)X + 2 - 2^N$ .

Par suite :  $\forall N \in \mathbb{N}$ ,  $A^N = (A^2 - 3A + 2I_n)Q + (2^N - 1)A + (2 - 2^N)I_n$

Or :  $A^2 - 3A + 2I_n = 0_{M_n(\mathbb{K})}$  par hypothèse.

**Conclusion.**  $\forall N \in \mathbb{N}$ ,  $A^N = \underbrace{(2^N - 1)}_{=a_N} A + \underbrace{(2 - 2^N)}_{b_N} I_n$ .

**EXERCICE 16.** — Soit  $n$  un entier naturel. Déterminer le reste dans la division euclidienne de  $X^n$  par  $X^3 - 10X^2 + 16X$ .

On a :  $X^3 - 10X^2 + 16X = X(X^2 - 10X + 16) = X(X - 2)(X - 8)$  (

Par ailleurs, d'après le théorème de la division euclidienne dans  $\mathbb{K}[X]$ , il existe deux polynômes  $Q$  et  $R$  tels que :

$$X^n = (X^3 - 10X^2 + 16X)Q + R \quad \text{avec} \quad \deg R < 3$$

La condition sur  $R$  impose que :  $\exists (a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ ,  $R = aX^2 + bX + c$

Par suite :  $X^n = (X^3 - 10X^2 + 16X)Q + aX^2 + bX + c$ . D'après () on a :  $X^n = X(X - 2)(X - 8)Q + aX^2 + bX + c$  (

En observant judicieusement que le polynôme  $X(X - 2)(X - 8)$  s'annule en 0, 2 et 8, on évalue la relation (n \in \mathbb{N}^\*) :

$$\begin{cases} 0 = c & (\text{évaluation en } 0) \\ 2^n = 4a + 2b + c & (\text{évaluation en } 2) \\ 8^n = 64a + 8b + c & (\text{évaluation en } 8) \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = c \\ 2^n = 4a + 2b \\ 8^n = 64a + 8b \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = c \\ 2^n = 4a + 2b \\ 8^n - 4 \times 2^n = 48a \end{cases} \\ \iff \begin{cases} 0 = c \\ b = 2^{n-1} - (8^n - 4 \times 2^n) / 24 \\ (8^n - 4 \times 2^n) / 48 = a \end{cases}$$

**Conclusion.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , le reste dans la division euclidienne de  $X^n$  par  $(X^3 - 10X^2 + 16X)$  est

$$((8^n - 4 \times 2^n) / 48) X^2 + (2^{n-1} - (8^n - 4 \times 2^n) / 24) X.$$

Le reste dans la division euclidienne de  $X^0 = 1$  par  $(X^3 - 10X^2 + 16X)$  est 1.

**EXERCICE 17.** — Soient  $m, n$  et  $p$  trois entiers naturels, et  $\theta$  un nombre réel. Vérifier dans chacun des cas suivants que le polynôme  $A$  divise le polynôme  $B$  :

1/  $A = 2X^3 - 3X^2 + X$  et  $B = (X - 1)^{2n} - X^{2n} + 2X - 1$ .

On a :  $A = X(2X^2 - 3X + 1) = 2X(X - 1)\left(X - \frac{1}{2}\right)$ . Pour montrer que  $A$  divise  $B$ , il suffit donc de vérifier que  $X, X - 1$  et  $X - \frac{1}{2}$  divisent  $B$ , c'est-à-dire que  $0, 1$  et  $\frac{1}{2}$  sont racines de  $B$ .

Ces trois vérifications sans difficulté faites, on peut conclure :  $A$  divise  $B$ .

2/  $A = X^2 + X + 1$  et  $B = X^{3n+2} + X^{3m+1} + X^{3p}$ .

On a :  $A = (X - j)(X - \bar{j})$ . Même principe que dans la question précédente : pour justifier que  $A$  divise  $B$ , il suffit de vérifier que  $j$  et  $\bar{j}$  sont racines de  $B$ . En anticipant un peu (cf exercice suivant), il suffit seulement de vérifier que  $j$  est racine de  $B$  car  $B$  est à coefficients réels, et qu'un polynôme à coefficients réels admettant pour racine un complexe  $z$  admet aussi comme racine son conjugué  $\bar{z}$ .

On a :  $B(j) = j^{3n+2} + j^{3m+1} + j^{3p}$ .

Or :  $j^3 = 1$ . Donc :  $j^{3n+2} = j^2$ ;  $j^{3m+1} = j$  et  $j^{3p} = 1$ .

D'où :  $B(j) = j^2 + j + 1 = 0$  puisque la somme des éléments de  $\mathbb{U}_3$  est nulle.

Donc  $j$  est racine de  $B$ , et en vertu de la remarque précédente,  $\bar{j}$  est aussi racine de  $B$ .

Donc  $(X - j)(X - \bar{j})$  divise  $B$ , c'est-à-dire  $A$  divise  $B$ .

3/  $A = X^2 - 2X \cos \theta + 1$  et  $B = X^{2n} - 2X^n \cos(n\theta) + 1$  avec  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ .<sup>1</sup>

Pour appliquer le même principe que dans les questions précédentes, on cherche les racines de  $A$ .

A cette fin, on résout l'équation :  $z^2 - 2z \cos \theta + 1 = 0$ . Son discriminant est  $\Delta = 4(\cos^2 \theta - 1) = -4 \sin^2 \theta = (2i \sin \theta)^2$ .

L'hypothèse faite sur  $\theta$  assure que  $\Delta$  est strictement négatif, et l'équation possède donc deux racines complexes conjuguées :  $\cos \theta \pm i \sin \theta = e^{\pm i\theta}$ .

Ainsi :  $A = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$ .

Puisque  $B$  est à coefficients réels, il suffit de vérifier que  $e^{i\theta}$  est racine de  $B$  pour parvenir à nos fins.

Or :  $B(e^{i\theta}) = e^{2ni\theta} - 2e^{ni\theta} \cos(n\theta) + 1 = \cos(2n\theta) + i \sin(2n\theta) - 2 \cos^2(n\theta) - 2i \sin(n\theta) \cos(n\theta) + 1$

$$2 \cos^2(n\theta) - 1 + 2in \sin(n\theta) \cos(n\theta) - 2 \cos^2(n\theta) - 2i \sin(n\theta) \cos(n\theta) + 1 = 0^2$$

1. C'est-à-dire que  $\theta$  est un réel non multiple de  $\pi$ .

2. En utilisant les formules de duplication pour  $\cos$  et  $\sin$  :  $\cos(2a) = 2 \cos^2 a - 1$  et  $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$ .

En résumé :  $B(e^{i\theta}) = 0$ . Ce qui signifie que  $e^{i\theta}$  est racine de  $B$ . Le polynôme  $B$  étant à coefficients réels, on en déduit que  $e^{-i\theta}$  est également racine de  $B$ .

Par suite  $(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$  divise  $B$ , c'ad :  $A$  divise  $B$ .

**EXERCICE 18.** — Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Etablir que si  $\alpha \in \mathbb{C}$  est racine de  $P$ , alors  $\bar{\alpha}$  est racine de  $P$ .

C'est une preuve de cours.

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ , et soit  $\alpha \in \mathbb{C}$  une racine de  $P$ . Supposons  $P$  non nul (sinon il n'y a rien à prouver), et notons  $n = \deg(P)$ . Il existe  $(n + 1)$  réels  $a_0, \dots, a_n$  tels que :  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ .

Puisque  $\alpha$  est racine de  $P$ , on a :  $\sum_{k=0}^n a_k \alpha^k = 0$ . En prenant les conjugués des deux termes de cette égalité, on obtient :

$$\overline{\sum_{k=0}^n a_k \alpha^k} = 0 \iff \sum_{k=0}^n \bar{a}_k \bar{\alpha}^k = 0 \iff \sum_{k=0}^n a_k \bar{\alpha}^k = 0 \iff P(\bar{\alpha}) = 0$$

La première équivalence provenant de la compatibilité de la conjugaison avec l'addition, la multiplication, et l'élevation à une puissance entière ; la seconde de l'hypothèse suivant laquelle les  $a_k$  sont réels (et donc invariants par conjugaison) ; la dernière de la définition du polynôme  $P$ .

**Conclusion.** Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Si  $\alpha \in \mathbb{C}$  est racine de  $P$ , alors  $\bar{\alpha}$  est racine de  $P$ .

**EXERCICE 19.** — Factoriser dans  $\mathbb{R}[X]$  le polynôme :  $P = X^4 - X^3 + 2X^2 - 2X + 4$  après avoir calculé  $P(1 + i)$ .

► Calculons  $P(1 + i)$  : on a  $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ , d'où :

$$P(1 + i) = 4e^{i\pi} - 2\sqrt{2}e^{3i\pi/4} + 4e^{i\pi/2} - 2\sqrt{2}e^{i\pi/4} + 4 = -4 + 2 - 2i + 4i - 2 - 2i + 4 = 0$$

Ainsi  $1 + i$  est racine de  $P$ , et en vertu de l'exercice précédent,  $1 - i$  est également racine de  $P$ .

Il s'ensuit que  $P$  est multiple de  $(X - 1 - i)(X - 1 + i)$ , c'est-à-dire de  $(X^2 - 2X + 2)$ .

Il existe donc un polynôme  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P = (X^2 - 2X + 2)Q$ , que l'on peut déterminer en effectuant la division euclidienne de  $P$  par  $(X^2 - 2X + 2)$ .

$$\begin{array}{r|l} X^4 - X^3 + 2X^2 - 2X + 4 & X^2 - 2X + 2 \\ - (X^4 - 2X^3 + 2X^2) & \\ \hline X^3 - 2X + 4 & X^2 + X + 2 \\ - (X^3 - 2X^2 + 2X) & \\ \hline 2X^2 - 4X + 4 & \\ - (2X^2 - 4X + 4) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Par suite :  $X^4 - X^3 + 2X^2 - 2X + 4 = (X^2 - 2X + 2)(X^2 + X + 2)$

► Or, le polynôme  $X^2 + X + 2$  possède deux racines complexes conjuguées :  $(-1 \pm i\sqrt{7})/2$ .

**Conclusion.** Le polynôme possède  $X^4 - X^3 + 2X^2 - 2X + 4$  quatre racines complexes :  $1 \pm i$  et  $\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$ .

On peut d'ailleurs déduire des calculs précédents que la factorisation dans  $\mathbb{C}[X]$  du polynôme  $P$  est :

$$X^4 - X^3 + 2X^2 - 2X + 4 = (X - 1 - i)(X - 1 + i) \left( X - \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2} \right) \left( X - \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2} \right)$$

Et sa factorisation dans  $\mathbb{R}[X]$  est :

$$X^4 - X^3 + 2X^2 - 2X + 4 = (X^2 - 2X + 2)(X^2 + X + 2)$$

**EXERCICE 20.** — Factoriser le polynôme  $P = X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2X - 3$ , dans  $\mathbb{C}[X]$  et dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Indication : on pourra calculer  $P(i)$ .

On vérifie aisément que  $P(i) = 0$ . Donc  $i$  est racine de  $P$ . Puisque  $P$  est à coefficients réels,  $\bar{i}$  est également racine de  $P$ .

Donc  $(X - i)(X - \bar{i}) = X^2 + 1$  divise  $P$  (c'est ce que l'on a vu en cours hier).

On effectue alors la division euclidienne de  $P$  par  $X^2 + 1$  pour obtenir :  $P = (X^2 + 1)(X^2 + 2X - 3)$ , puis :  $P = (X^2 + 1)(X - 1)(X + 3)$ .

**Conclusion.** Dans  $\mathbb{R}[X]$ , on a :  $P = (X^2 + 1)(X - 1)(X + 3)$  ( $P$  ne peut pas être factorisé davantage, car  $X^2 + 1$  n'a pas de racines réelles).

Dans  $\mathbb{C}[X]$ , on a :  $P = (X - i)(X + i)(X - 1)(X + 3)$ .

**EXERCICE 21.** — Etablir qu'il existe un unique polynôme  $P \in \mathbb{R}_2[X]$ , que l'on déterminera, tel que :

$$P(-1) = 1; \quad P(0) = -2 \quad \text{et} \quad P(2) = 1$$

On peut construire les polynômes de Lagrange  $L_{-1}$ ,  $L_0$  et  $L_2$  associés aux réels  $-1$ ,  $0$  et  $2$ .

De manière analogue à ce qui est écrit dans le cours, on obtient :

$$L_{-1} = \frac{1}{3}X(X - 2); \quad L_0 = -\frac{1}{2}(X + 1)(X - 2); \quad L_2 = \frac{1}{6}X(X + 1)$$

On pose alors :  $P = L_{-1} - 2L_0 + L_2$ . Puisque  $L_{-1}$ ,  $L_0$  et  $L_2$  sont de degré 2 et à coefficients réels,  $P$  est un polynôme de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

De plus :  $P(-1) = L_{-1}(-1) - 2L_0(-1) + L_2(-1) = 1 - 2 \times 0 + 0 = 1$  (par construction des polynômes de Lagrange).

On vérifie de la même façon que  $P(0) = -2$  et  $P(2) = 1$ .

Prouvons l'unicité de  $P$  : s'il existe un autre polynôme  $Q$  de degré au plus 2 tel que  $Q(-1) = 1$ ,  $Q(0) = -2$  et  $Q(2) = 1$ , alors  $P$  et  $Q$  sont deux polynômes de  $\mathbb{R}_2[X]$  prenant les mêmes valeurs en 3 points : d'après le principe du prolongement algébrique, ils sont égaux.

**Conclusion.** Il existe un unique polynôme  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  tel que :

$$P(-1) = 1; \quad P(0) = -2 \quad \text{et} \quad P(2) = 1$$

qui est :  $P = L_{-1} - 2L_0 + L_2$ .

**EXERCICE 22.** — Soient  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  et  $\alpha_4$  quatre réels, deux à deux distincts.

Etablir que l'application :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}_3[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ P &\longmapsto (P(\alpha_1), P(\alpha_2), P(\alpha_3), P(\alpha_4)) \end{aligned}$$

est bijective.

L'application  $F$  est bijective si tout élément  $(x, y, z, t)$  de  $\mathbb{R}^4$  admet un unique antécédent par  $F$ .

En d'autres termes, montrer que  $F$  est bijective revient à montrer qu'il existe un unique polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_3[X]$  tel que :

$$P(\alpha_1) = x; \quad P(\alpha_2) = y; \quad P(\alpha_3) = z; \quad P(\alpha_4) = t$$

C'est donc une généralisation de l'exercice précédent. La stratégie pour le résoudre est donc la même : on construit les polynômes interpolateurs de Lagrange  $L_1, \dots, L_4$  associés à  $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ .

Explicitement :

$$L_1 = \frac{1}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)} (X - \alpha_2)(X - \alpha_3)(X - \alpha_4)$$

Le polynôme  $L_1$  ainsi défini, on a :

$$L_1(\alpha_1) = 1; \quad L_1(\alpha_2) = 0; \quad L_1(\alpha_3) = 0; \quad L_1(\alpha_4) = 0;$$

On construit de façon analogue les polynômes  $L_2, L_3$  et  $L_4$ , qui vont prendre la valeur 1 en  $\alpha_2, \alpha_3$  et  $\alpha_4$  respectivement, et qui vont s'annuler en les autres  $\alpha_i$ .

Plutôt que de les définir un par un, on peut donner une formule générale :

$$\forall k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket, \quad L_k = \prod_{i=1, i \neq k}^4 \frac{(X - \alpha_i)}{(\alpha_k - \alpha_i)}$$

Ces polynômes construits, revenons à la preuve de la bijectivité de  $F$ . Soit  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ .

On pose :  $P = xL_1 + yL_2 + zL_3 + tL_4$ . Le polynôme  $P$  est de degré au plus 3, en tant que combinaison linéaire de polynômes de degré 3 exactement.

En outre, par construction des polynômes  $L_i$ , on a :

$$P(\alpha_1) = x; \quad P(\alpha_2) = y; \quad P(\alpha_3) = z; \quad P(\alpha_4) = t$$

Ce qui signifie déjà que  $F(P) = (x, y, z, t)$  (et prouve donc la surjectivité de  $F$ ).

En outre, ce polynôme  $P$  est unique (dans  $\mathbb{R}_3[X]$ ) pour la même raison que dans l'exercice précédent. S'il existe un polynôme  $Q$  de  $\mathbb{R}_3[X]$  tel que  $F(Q) = (x, y, z, t)$ , alors  $P$  et  $Q$  sont deux polynômes de  $\mathbb{R}_3[X]$  qui coïncident en 4 points : d'après le principe du prolongement algébrique, ils sont égaux.

En résumé : tout élément  $(x, y, z, t)$  de  $\mathbb{R}^4$  admet un unique antécédent par  $F$  (le polynôme  $xL_1 + yL_2 + zL_3 + tL_4$ ).

**Conclusion.**  $F$  est bijective.

**EXERCICE 23.** — Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  telle que :  $A^2 - 5A + 6I_n = 0_{M_n(\mathbb{K})}$ .

Etablir que pour tout entier naturel  $N$ , il existe deux scalaires  $a_N$  et  $b_N$  tels que :  $A^N = a_N A + b_N I_n$ .

C'est une question classique (d'où ce nouvel exemple).

L'idée est de réaliser la division euclidienne de  $X^N$  par  $X^2 - 5X + 6$ .

On peut observer que  $X^2 - 5X + 6 = (X - 2)(X - 3)$ , et affirmer que d'après le théorème de la division euclidienne, il existe un polynôme  $Q$  et deux scalaires  $a$  et  $b$  tels que :

$$X^N = (X - 2)(X - 3)Q + aX + b$$

On en déduit :  $2^N = 2a + b$  (par évaluation en 2) et  $3^N = 3a + b$  (par évaluation en 3).

La résolution aisée de ce système conduit à :  $a = 3^N - 2^N$  et  $b = 2^N + 2^{N+1} - 2 \times 3^N$ .

Ainsi :  $X^N = (X^2 - 5X + 6)Q + (3^N - 2^N)X + 2^N + 2^{N+1} - 2 \times 3^N$ .

On en déduit que :

$$A^N = \underbrace{(A^2 - 5A + 6I_n)}_{=0_{M_n(\mathbb{K})}} Q(A) + (3^N - 2^N)A + (2^N + 2^{N+1} - 2 \times 3^N)I_n$$

**Conclusion.**  $\forall N \in \mathbb{N}$ ,  $A^N = (3^N - 2^N)A + (2^N + 2^{N+1} - 2 \times 3^N)I_n$

**EXERCICE 24.** — Soit  $z$  un nombre complexe non réel.

Etablir que le polynôme  $P = (X - z)(X - \bar{z})$  est à coefficients réels.

Indication : développer  $(X - z)(X - \bar{z})$ .

On a :

$$(X - z)(X - \bar{z}) = X^2 - (z + \bar{z})X + z\bar{z} \quad \text{soit} \quad (X - z)(X - \bar{z}) = X^2 - 2\operatorname{Re}(z)X + |z|^2$$

Puisque  $\operatorname{Re}(z)$  et  $|z|^2$  sont des nombres réels, le polynôme  $(X - z)(X - \bar{z})$  est à coefficients réels (c'est un élément de  $\mathbb{R}_2[X]$ ).

**Remarque.** Cette formule  $(X - z)(X - \bar{z}) = X^2 - 2\operatorname{Re}(z)X + |z|^2$  est tellement utile en pratique qu'elle mérite d'être connue !

**EXERCICE 25.** — Factoriser le polynôme  $P = X^3 - 1$ , dans  $\mathbb{C}[X]$  et dans  $\mathbb{R}[X]$ .

On sait que les racines de  $X^3 - 1$  sont les racines cubiques de l'unité. Par suite :

$$X^3 - 1 = (X - 1)(X - j)(X - \bar{j}) \quad (\text{factorisation dans } \mathbb{C}[X])$$

Pour obtenir la factorisation de  $X^3 - 1$  dans  $\mathbb{R}[X]$ , on multiplie les parenthèses faisant intervenir des racines complexes conjuguées (et on utilise l'exo précédent) :

$$X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1) \quad (\text{factorisation dans } \mathbb{R}[X])$$

**EXERCICE 26.** — Factoriser le polynôme  $P = X^6 - 1$ , dans  $\mathbb{C}[X]$  et dans  $\mathbb{R}[X]$ .

On sait que les racines de  $X^6 - 1$  sont les racines sixièmes de l'unité. Par suite :

$$X^6 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X - j)(X - \bar{j})(X + j)(X + \bar{j}) \quad (\text{factorisation dans } \mathbb{C}[X])$$

Pour obtenir la factorisation de  $X^6 - 1$  dans  $\mathbb{R}[X]$ , on multiplie deux à deux les parenthèses faisant intervenir des racines complexes conjuguées (et on utilise l'exo 1) :

$$X^6 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1) \quad (\text{factorisation dans } \mathbb{R}[X])$$

**EXERCICE 27.** — Soient  $n$  un entier naturel  $\geq 2$  et  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  ( $n + 1$ ) réels, deux à deux distincts.

Etablir que l'application :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(\alpha_0), P(\alpha_1), \dots, P(\alpha_n)) \end{aligned}$$

est bijective.

L'application  $F$  est bijective si tout élément  $(x_0, \dots, x_n)$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  admet un unique antécédent par  $F$ .

En d'autres termes, montrer que  $F$  est bijective revient à montrer qu'il existe un unique polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  tel que :

$$P(\alpha_0) = x_0; \quad P(\alpha_1) = x_1; \dots; \quad P(\alpha_n) = x_n$$

La méthode pour établir ce résultat consiste donc à construire les polynômes interpolateurs de Lagrange  $L_0, \dots, L_n$  associés à  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ .

Explicitement :

$$L_0 = \frac{1}{(\alpha_0 - \alpha_1)(\alpha_0 - \alpha_2) \dots (\alpha_0 - \alpha_n)} (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_n)$$

Le polynôme  $L_0$  ainsi défini, on a :

$$L_0(\alpha_0) = 1; \quad L_0(\alpha_1) = 0; \quad L_0(\alpha_n) = 0$$

On construit de façon analogue les polynômes  $L_1, \dots, L_n$ , qui vont prendre la valeur 1 en un  $\alpha_i$ , et qui vont s'annuler en les autres  $\alpha_j$ .

La formule générale permettant de les définir est :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L_k = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{(X - \alpha_i)}{(\alpha_k - \alpha_i)}$$

Ces polynômes construits, revenons à la preuve de la bijectivité de  $F$ . Soit  $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

On pose :  $P = \sum_{k=0}^n x_k L_k$ . Le polynôme  $P$  est de degré au plus  $n$ , en tant que combinaison linéaire de polynômes de degré  $n$  exactement.

En outre, par construction des polynômes  $L_k$ , on a :

$$P(\alpha_0) = x_0; \quad P(\alpha_1) = x_1; \dots; \quad P(\alpha_n) = x_n$$

Ce qui signifie déjà que  $F(P) = (x_0, \dots, x_n)$  (et prouve donc la surjectivité de  $F$ ).

En outre, ce polynôme  $P$  est unique (dans  $\mathbb{R}_n[X]$ ) pour la même raison que dans l'exercice 3 d'hier. S'il existe un polynôme  $Q$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  tel que  $F(Q) = (x_0, \dots, x_n)$ , alors  $P$  et  $Q$  sont deux polynômes de  $\mathbb{R}_n[X]$  qui coïncident en  $(n + 1)$  points : d'après le principe du prolongement algébrique, ils sont égaux.

En résumé : tout élément  $(x_0, \dots, x_n)$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  admet un unique antécédent par  $F$  (le polynôme  $\sum_{k=0}^n x_k L_k$ ).

**Conclusion.**  $F$  est bijective.

**EXERCICE 28.** — Factoriser le polynôme  $P = X^4 + 1$ , dans  $\mathbb{C}[X]$  et dans  $\mathbb{R}[X]$ .

On commence par déterminer les racines de  $X^4 + 1$ , en résolvant l'équation :

$$z^4 + 1 = 0 \iff z^4 = -1 \iff z^4 = (e^{i\pi/4})^4 \iff \exists k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, z = i^k e^{i\pi/4}$$

Par suite le polynôme  $X^4 + 1$  possède quatre racines complexes :  $e^{i\pi/4}$ ,  $ie^{i\pi/4}$ ,  $-e^{i\pi/4}$  et  $-ie^{i\pi/4}$ .

Ainsi :

$$X^4 + 1 = (X - e^{i\pi/4})(X - ie^{i\pi/4})(X + e^{i\pi/4})(X + ie^{i\pi/4}) \quad (\text{factorisation dans } \mathbb{C}[X])$$

Pour obtenir la factorisation de  $X^4 + 1$  dans  $\mathbb{R}[X]$ , on multiplie deux à deux les parenthèses faisant intervenir des racines complexes conjuguées :

$$X^4 + 1 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1) \quad (\text{factorisation dans } \mathbb{R}[X])$$

**EXERCICE 29.** — Factoriser le polynôme  $P = X^4 - X^2 + 2X - 1$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Observons que :  $P = X^4 - (X^2 - 2X + 1) = X^4 - (X - 1)^2 = (X^2 - X + 1)(X^2 + X - 1)$ .

Les deux polynômes du second degré se factorisent aisément :

$$X^2 - X + 1 = (X + j)(X + \bar{j}) \text{ et } X^2 + X - 1 = (X - \alpha)(X - \beta) \text{ avec } \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ et } \beta = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

Par suite :

$$X^4 - X^2 + 2X - 1 = (X + j)(X + \bar{j})(X - \alpha)(X - \beta) \quad (\text{factorisation dans } \mathbb{C}[X])$$

Pour obtenir la factorisation de  $X^4 - X^2 + 2X - 1$  dans  $\mathbb{R}[X]$ , on multiplie les deux parenthèses faisant intervenir des racines complexes conjuguées :

$$X^4 - X^2 + 2X - 1 = (X^2 - X + 1)(X - \alpha)(X - \beta) \quad (\text{factorisation dans } \mathbb{R}[X])$$

**EXERCICE 30.** — Démontrer la **formule de Taylor pour les polynômes** : pour tout polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  de degré  $n$ , on a

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

Cf pdf.

**EXERCICE 31.** — Le but de cet exercice est de mettre en exergue une propriété des polynômes de Lagrange.

On considère les 3 réels :  $\alpha_0 = -1$ ,  $\alpha_1 = 1$  et  $\alpha_2 = 2$ .

On définit  $L_0$ ,  $L_1$  et  $L_2$  comme les 3 polynômes de Lagrange associés aux réels  $-1$ ,  $1$  et  $2$ .

1/ Par définition,  $L_0$ ,  $L_1$  et  $L_2$  appartiennent à  $\mathbb{R}_n[X]$ ; pour quelle valeur de  $n$  ?<sup>3</sup>

D'après le cours, les polynômes de Lagrange  $L_0, \dots, L_n$  associés à  $(n+1)$  scalaires  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$  deux à deux distincts sont tous exactement de degré  $n$ .

2/ Déterminer les expressions des polynômes de Lagrange  $L_0$ ,  $L_1$  et  $L_2$  associés aux trois réels  $-1$ ,  $1$  et  $2$ .

$$\text{On a : } L_0 = \frac{1}{6}(X-1)(X-2) = \frac{1}{6}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{3}$$

$$\text{Et : } L_1 = -\frac{1}{2}(X+1)(X-2) = -\frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + 1$$

$$\text{Enfin : } L_2 = \frac{1}{3}(X+1)(X-1) = \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}$$

3/ **Trois exemples pour commencer à comprendre.**

a/ On pose  $Q = L_0 + L_1 + L_2$ . Calculer explicitement le polynôme  $Q$  (c'est-à-dire déterminer explicitement ses coefficients).

D'après la question précédente :

$$Q = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)X^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)X + \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \iff Q = 1$$

b/ On pose  $R = -L_0 + L_1 + 2L_2$ . Calculer explicitement le polynôme  $R$ .

D'après la question précédente :

$$R = \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right)X^2 + \left(+\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)X - \frac{1}{3} + 1 - \frac{2}{3} \iff R = X$$

c/ On pose  $S = L_0 + L_1 + 4L_2$ . Calculer explicitement le polynôme  $S$ .

D'après la question précédente :

$$S = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{4}{3}\right)X^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)X + \frac{1}{3} + 1 - \frac{4}{3} \iff S = X^2$$

4/ **Généralisation.**

a/ Soit  $P \in \mathbb{R}_2[X]$ . On pose  $P_1 = P(-1)L_0 + P(1)L_1 + P(2)L_2$ . A la lumière des exemples ci-dessus, que peut-on dire des polynômes  $P$  et  $P_1$  ?

D'après les exemples précédents, on peut conjecturer que :  $P_1 = P$ .

---

3. Sous-entendu : quelle est la **plus petite** valeur de  $n$  qui convient.

b/ Justifier la réponse à la question précédente.

Par définition :  $P_1 = P(-1)L_0 + P(1)L_1 + P(2)L_2$ . Puisque  $L_0, L_1$  et  $L_2$  sont tous les trois de degré 2,  $P_1$  est de degré au plus 2. Ainsi :  $P_1 \in \mathbb{R}_2[X]$ .

Par ailleurs :  $P_1(-1) = P(-1)L_0(-1) + P(1)L_1(-1) + P(2)L_2(-1)$ .

Or par construction des polynômes de Lagrange, on a :

$$L_0(-1) = 1; \quad L_1(-1) = 0; \quad L_2(-1) = 0$$

On en déduit que :  $P_1(-1) = P(-1)$ .

Par un raisonnement analogue :  $P_1(1) = P(1)$  et  $P_1(2) = P(2)$ .

En résumé :

$$P \in \mathbb{R}_2[X], \quad P_1 \in \mathbb{R}_2[X] \quad \text{et} \quad \begin{cases} P_1(-1) = P(-1) \\ P_1(1) = P(1) \\ P_1(2) = P(2) \end{cases}$$

D'après le principe du prolongement algébrique :  $P = P_1$ .<sup>4</sup>

**EXERCICE 32.** — On pose  $P = X^4 - 2X^2 + 3X + 5 \in \mathbb{R}_4[X]$ .

On considère par ailleurs les 5 polynômes de Lagrange  $L_0, L_1, L_2, L_3$  et  $L_4$  associés aux réels 0, 1, 2, 3 et 4.

**Les deux questions sont indépendantes.**

1/ Exprimer  $P$  en fonction de  $L_0, L_1, L_2, L_3$  et  $L_4$ .

C'est l'exercice 1, avec 5 valeurs (et 5 polynômes) au lieu de 3. Par les mêmes arguments que dans la question 4-b de l'exo précédent, on a :

$$P = P(0)L_0 + P(1)L_1 + P(2)L_2 + P(3)L_3 + P(4)L_4$$

2/ Exprimer  $P$  en fonction de 1,  $(X + 1)$ ,  $(X + 1)^2$ ,  $(X + 1)^3$  et  $(X + 1)^4$ .

D'après la formule de Taylor (en  $\alpha$ , avec  $\alpha = -1$ ) dans  $\mathbb{R}_4[X]$  :

$$P = \sum_{k=0}^4 \frac{P^{(k)}(-1)}{k!} (X + 1)^k$$

soit :

$$P = P(-1) + P'(-1)(X + 1) + \frac{P''(-1)}{2} (X + 1)^2 + \frac{P^{(3)}(-1)}{6} (X + 1)^3 + \frac{P^{(4)}(-1)}{24} (X + 1)^4$$

Or :  $P(-1) = 1$ ;  $P'(-1) = 3$ ;  $P''(-1) = 8$ ;  $P^{(3)}(-1) = -24$ ;  $P^{(4)}(-1) = 24$

Ainsi :

$$P = 1 + 3(X + 1) + 4(X + 1)^2 - 4(X + 1)^3 + (X + 1)^4$$

4. Puisqu'il s'agit de deux polynômes de degré au plus 2, qui coïncident en 3 valeurs.

**EXERCICE 33.** — Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère  $(n+1)$  scalaires  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$  deux à deux distincts, et  $L_0, \dots, L_n$  les  $(n+1)$  polynômes de Lagrange (de  $\mathbb{K}_n[X]$ ) associés à  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ .

Soit  $P \in \mathbb{K}_n[X]$ .

**Les deux questions sont indépendantes.**

1/ On pose :  $Q = \sum_{k=0}^n P(\alpha_k)L_k$ . Montrer que  $P = Q$ .

Par construction, les polynômes de Lagrange  $L_0, \dots, L_n$  sont tous exactement de degré  $n$ . Il s'ensuit que  $Q$  est au plus de degré  $n$ , càd :  $Q \in \mathbb{K}_n[X]$ .

Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . On a :

$$Q(\alpha_i) = \sum_{k=0}^n P(\alpha_k)L_k(\alpha_i)$$

Or, de nouveau par construction des polynômes de Lagrange :

$$L_k(\alpha_i) = \delta_{ik}, \text{ c\`ad : } L_i(\alpha_i) = 1 \text{ et } L_k(\alpha_i) = 0 \text{ si } k \neq i$$

Il s'ensuit que :  $Q(\alpha_i) = P(\alpha_i)$ .

L'entier  $i$  étant un entier arbitraire de  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on a établi que :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad Q(\alpha_i) = P(\alpha_i)$$

En résumé :

$$P \in \mathbb{K}_n[X], \quad Q \in \mathbb{K}_n[X] \quad \text{et } \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad Q(\alpha_i) = P(\alpha_i)$$

D'après le principe du prolongement algébrique :  $P = Q$ .<sup>5</sup>

2/ Exprimer  $P$  en fonction de  $1, (X+1), \dots, (X+1)^n$ .

D'après la formule de Taylor dans  $\mathbb{K}_n[X]$  appliquée en  $\alpha = -1$ , on a :

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(-1)}{k!} (X+1)^k$$

Plus explicitement mais moins rigoureusement :

$$P = P(-1) + P'(-1)(X+1) + \frac{P''(-1)}{2!} (X+1)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(-1)}{n!} (X+1)^n$$

5. Puisqu'il s'agit de deux polynômes de degré au plus  $n$ , qui coïncident en  $n+1$  valeurs.

**EXERCICE 34.** — Etablir que 1 est racine de multiplicité 4 (oups!) de  $P = X^5 - X^4 - 6X^3 + 14X^2 - 11X + 3$ .

On vérifie aisément que  $P(1) = 0$ .

De plus :  $P' = 5X^4 - 4X^3 - 18X^2 + 28X - 11$ . D'où :  $P'(1) = 0$ .

De plus :  $P'' = 20X^3 - 12X^2 - 36X + 28$ . D'où :  $P''(1) = 0$ .

Puisque  $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$ , on en déduit que 1 est racine de multiplicité au moins 3 de  $P$ . Par suite :  $(X - 1)^3$  divise  $P$ .

Mais en fait :  $P^{(3)} = 60X^2 - 24X - 36$ . Donc  $P^{(3)}(1) = 0$ .

En revanche :  $P^{(4)} = 120X - 24$ . Donc  $P^{(4)}(1) = 96 \neq 0$ .

**Conclusion.**  $P(1) = P'(1) = P''(1) = P^{(3)}(1) = 0$  et  $P^{(4)}(1) \neq 0$ . On en déduit que 1 est racine de multiplicité 4 de  $P$ .

Ce qui signifie que  $(X - 1)^4$  divise  $P$ , et que  $(X - 1)^5$  ne divise pas  $P$ .

**EXERCICE 35.** — Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer  $a$  et  $b$  pour que  $P = aX^{n+1} + bX^n + 1$  soit divisible par  $(X - 1)^2$ .

D'après le cours (définition de multiplicité) :

$$[P = aX^{n+1} + bX^n + 1 \text{ est divisible par } (X - 1)^2] \iff [1 \text{ est racine de } P \text{ de multiplicité au moins } 2]$$

D'où, encore d'après le cours (théorème faisant le lien entre la multiplicité et l'annulation des 1ères dérivées) :

$$[P = aX^{n+1} + bX^n + 1 \text{ est divisible par } (X - 1)^2] \iff [P(1) = P'(1) = 0]$$

Or :  $P(1) = a + b + 1$  et  $P'(1) = (n + 1)a + nb$ . Par suite :

$$[P(1) = P'(1) = 0] \iff \begin{cases} a + b = -1 \\ (n + 1)a + nb = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = n \\ b = -(n + 1) \end{cases}$$

**Conclusion.** Le polynôme  $P = aX^{n+1} + bX^n + 1$  est divisible par  $(X - 1)^2$  si et seulement si  $a = n$  et  $b = -(n + 1)$ .

**EXERCICE 36.** — Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ . Montrer que le polynôme  $P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$  est divisible par  $(X - 1)^3$ , mais n'est pas divisible par  $(X - 1)^4$ .

D'après le cours (définition de multiplicité),  $P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$  est divisible par  $(X - 1)^3$ , mais n'est pas divisible par  $(X - 1)^4$  si et seulement si 1 est racine de multiplicité 3 de  $P$ .

D'après le cours (théorème...), 1 est racine de multiplicité 3 de  $P$  si et seulement si :

$$P(1) = P'(1) = P''(1) = 0 \text{ et } P^{(3)}(1) \neq 0$$

On vérifie aisément que  $P(1) = 0$ .

De plus :  $P' = 2nX^{2n-1} - n(n + 1)X^n + n(n - 1)X^{n-2}$ . D'où :  $P'(1) = 2n - n^2 - n + n^2 - n = 0$ .

De plus :  $P'' = 2n(2n - 1)X^{2n-2} - n^2(n + 1)X^{n-1} + n(n - 1)(n - 2)X^{n-3}$ .

$$\text{D'où : } P''(1) = 4n^2 - 2n - n^3 - n^2 + n^3 - 3n^2 + 2n = 0.$$

De plus :  $P''' = 2n(2n - 1)X^{2n-3} - n^2(n + 1)X^{n-2} + n(n - 1)(n - 2)X^{n-4}$ .

$$\text{D'où : } P''(1) = 4n^2 - 2n - n^3 - n^2 + n^3 - 3n^2 + 2n = 0.$$

$$\text{Enfin : } P^{(3)} = 2n(2n-1)(2n-2)X^{2n-3} - n^2(n+1)(n-1)X^{n-2} + n(n-1)(n-2)(n-3)X^{n-4}.$$

$$\text{Donc : } P^{(3)}(1) = 4n^3 - 6n^2 + 2n - n^4 + n^2 + n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n = -2n^3 + 5n^2 - 4n \neq 0.$$

**Conclusion.**  $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$  et  $P^{(3)}(1) \neq 0$ . On en déduit que 1 est racine de multiplicité 3 de  $P$ .  
Ce qui signifie que  $(X-1)^3$  divise  $P$ , et que  $(X-1)^4$  ne divise pas  $P$ .

**EXERCICE 37.** — Déterminer la valeur de  $m$  pour que 1 soit racine double<sup>6</sup> du polynôme  $P_m = X^3 - 3X + m$ .

1 est racine double de  $P_m = X^3 - 3X + m$  SSI  $P_m(1) = P'_m(1) = 0$  et  $P''_m(1) \neq 0$ .

$$\text{Or : } P_m(1) = -2 + m, P'_m(1) = 0 \text{ et } P''_m(1) = 6.$$

Il s'ensuit que : 1 est racine double de  $P_m = X^3 - 3X + m$  SSI  $m = 2$ .

**Remarque.** Lorsque  $m = 2$ , on a :  $P_m = X^3 - 3X + 2 = (X-1)^2(X+2)$ .

**EXERCICE 38.** — Déterminer les racines (dans  $\mathbb{C}$ ) du polynôme  $P = \sum_{k=0}^n \left[ \binom{n}{k} 3^k (1-X)^{3n-2k} X^k \right]$  ainsi que leurs multiplicités.

On commence par observer judicieusement que :  $3n - 2k = n + 2(n - k)$ .

$$\text{Par suite : } (1-X)^{3n-2k} = (1-X)^n [(1-X)^2]^{n-k}.$$

$$\text{En exploitant cette remarque : } P = (1-X)^n \sum_{k=0}^n \left[ \binom{n}{k} (3X)^k ((1-X)^2)^{n-k} \right]$$

$$\text{Donc : } P = (1-X)^n (3X + (1-X)^2)^n$$

$$\text{D'où : } P = (1-X)^n (X^2 + X + 1)^n$$

$$\text{Finalement : } P = (1-X)^n (X-j)^n (X-\bar{j})^n.$$

**Conclusion.**  $P$  admet exactement 3 racines dans  $\mathbb{C}$ , qui sont les racines cubiques de l'unité (1,  $j$  et  $\bar{j}$ ) : toutes trois sont de multiplicité  $n$ .

**EXERCICE 39.** — Etablir que le polynôme  $X^2 - 4X + 3$  n'est pas irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$ .

On a :  $X^2 - 4X + 3 = (X-1)(X-3)$ . Donc  $X^2 - 4X + 3$  admet un diviseur ( $(X-1)$  par exemple) dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**Conclusion.**  $X^2 - 4X + 3$  n'est pas irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$ .

6. C-à-d de multiplicité exactement 2.

**EXERCICE 40.** — Etablir que le polynôme  $X^2 - 3X + 4$  est irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Il est immédiat que le polynôme  $P = X^2 - 3X + 4$  n'admet pas de racines réelles (♠).<sup>7</sup>

Pour montrer qu'il est irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$ , il suffit de prouver que tout diviseur de  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$  est associé à 1 (càd est un polynôme constant non nul), ou est associé à  $P$ .

Soit donc  $Q$  un diviseur dans  $\mathbb{R}[X]$ . Alors il existe un polynôme  $R$  dans  $\mathbb{R}[X]$  tel que :  $P = QR$ .

En comparant les degrés des polynômes dans cette équation, on obtient :  $2 = \deg Q + \deg R$ .

Puisque  $\deg Q$  et  $\deg R$  sont nécessairement des entiers naturels, on en déduit que :  $\deg Q = 2$  et  $\deg R = 0$ , ou  $\deg Q = 0$  et  $\deg R = 2$ , ou  $\deg Q = \deg R = 1$ .

► **1er cas** —  $\deg Q = 2$  et  $\deg R = 0$ .

Dans ce cas :  $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$ ,  $R = \lambda$ . On en déduit que :  $Q = \frac{1}{\lambda} P$ . Donc  $Q$  est associé à  $P$ .

► **2ème cas** —  $\deg Q = 0$  et  $\deg R = 2$ .

Dans ce cas :  $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$ ,  $Q = \lambda$  (et donc :  $R = \frac{1}{\lambda} P$ ). D'où  $Q$  est associé à 1.

► **3ème cas** —  $\deg Q = \deg R = 1$ .

Dans ce cas :  $\exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  avec  $a$  et  $c$  non nuls, tels que  $Q = aX + b$  et  $R = cX + d$ . Or  $Q$  admet une racine réelle ( $-b/a$ ), donc  $P$  admet également une racine réelle. Ce qui contredit (♠). Ce dernier cas est donc exclus.

► **Synthèse.**

D'après ce qui précède, si  $Q$  est un diviseur de  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$ , alors  $Q$  est associé à  $P$  ou associé à 1.

**Conclusion.** Le polynôme  $X^2 - 3X + 4$  est irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**Remarque.** Le polynôme  $X^2 - 3X + 4$  n'est pas irréductible dans  $\mathbb{C}[X]$ , puisque dans  $\mathbb{C}[X]$ , on peut écrire :

$$X^2 - 3X + 4 = (X - z)(X - \bar{z}) \quad \text{avec} \quad z = \frac{3 + i\sqrt{7}}{2}.$$

**EXERCICE 41.** — Décomposer en irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$  puis dans  $\mathbb{R}[X]$  les polynômes suivants<sup>8</sup> :

$$P_1(X) = X^4 - 16 \quad P_2(X) = X^3 - 8 \quad P_3(X) = X^3 + X^2 + X + 1$$

1/ On peut commencer par chercher les racines de  $P_1$ . Pour tout complexe  $z$ , on a :

$$P_1(z) = 0 \iff z^4 - 16 = 0 \iff z^4 = 16 \iff \exists k \in [0, 3], z = 2i^k$$

En d'autres termes, les racines de  $P_1$  sont  $\pm 2$  et  $\pm 2i$ .

On en déduit la décomposition en irréductibles de  $P_1$  dans  $\mathbb{C}[X]$  :

$$P_1 = (X - 2)(X + 2)(X - 2i)(X + 2i)$$

Puis, en "multipliant les parenthèses" faisant intervenir des racines conjuguées, la décomposition en irréductibles de  $P_1$  dans  $\mathbb{R}[X]$  :

$$P_1 = (X - 2)(X + 2)(X^2 + 4)$$

7. Son discriminant étant strictement négatif.

8. Dans  $\mathbb{C}[X]$ , les polynômes irréductibles sont exactement ceux de degré 1. Dans  $\mathbb{R}[X]$ , les polynômes irréductibles sont exactement ceux de degré 1, et ceux de degré 2 sans racine réelle ("avec un  $\Delta < 0$ ").

► 2/  $P_2(X) = X^3 - 8$ . On peut commencer par chercher les racines de  $P_2$ . Pour tout complexe  $z$ , on a :

$$P_2(z) = 0 \iff z^3 - 8 = 0 \iff z^8 = 8 \iff \exists k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket, z = 2j^k$$

En d'autres termes, les racines de  $P_2$  sont  $2$ ,  $2j$  et  $2\bar{j}$ .

On en déduit la décomposition en irréductibles de  $P_2$  dans  $\mathbb{C}[X]$  :

$$P_2 = (X - 2)(X - 2j)(X - 2\bar{j})$$

Puis, en “multipliant les parenthèses” faisant intervenir des racines conjuguées, la décomposition en irréductibles de  $P_2$  dans  $\mathbb{R}[X]$  :

$$P_2 = (X - 2)(X^2 + 2X + 4)$$

► 3/  $P_3(X) = X^3 + X^2 + X + 1$ . D'après le cours (sur les complexes), les racines de  $P_3$  sont les racines quatrièmes de l'unité, sauf 1.

On en déduit la décomposition en irréductibles de  $P_3$  dans  $\mathbb{C}[X]$  :

$$P_3 = (X + 1)(X - i)(X + i)$$

Puis, en “multipliant les parenthèses” faisant intervenir des racines conjuguées, la décomposition en irréductibles de  $P_3$  dans  $\mathbb{R}[X]$  :

$$P_3 = (X + 1)(X^2 + 1)$$

**EXERCICE 42.** — Dans  $\mathbb{R}_6[X]$ , on considère l'ensemble  $E$  des polynômes  $P$  admettant 1 comme racine de multiplicité au moins 3.

1/ Par définition, que signifie l'assertion “ $P$  admet 1 comme racine de multiplicité au moins 3”.

D'après le cours,  $P$  admet 1 comme racine de multiplicité au moins 3 si  $(X - 1)^3$  divise  $P$ .

2/ Montrer qu'il existe quatre polynômes  $P_1, P_2, P_3$  et  $P_4$  à coefficients réels tel que :

$$\forall P \in E, \exists (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{R}^4, P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \alpha_4 P_4.$$

Soit  $P \in \mathbb{R}_6[X]$ . On a :

$$P \in E \iff \exists Q \in \mathbb{R}_3[X], P = (X - 1)^3 Q$$

$$\iff \exists (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{R}^4, P = (X - 1)^3 (\alpha_1 X^3 + \alpha_2 X^2 + \alpha_3 X + \alpha_4)$$

Ainsi :

$$P \in E \iff \exists (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{R}^4, P = \alpha_1 \underbrace{X^3(X - 1)^3}_{P_1} + \alpha_2 \underbrace{X^2(X - 1)^3}_{P_2} + \alpha_3 \underbrace{X(X - 1)^3}_{P_3} + \alpha_4 \underbrace{(X - 1)^3}_{P_4}$$

D'où la conclusion.

**EXERCICE 43.** — (\*) Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ , et soit  $a \in \mathbb{R}$ . On suppose que  $P(a) > 0$  et :  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $P^{(k)}(a) \geq 0$ .  
 Etablir que :  $\forall x \geq a$ ,  $P(x) > 0$ .

Le polynôme  $P$  étant non nul par hypothèse, on peut poser  $n = \deg P \in \mathbb{N}$ .

D'après la formule de Taylor dans  $\mathbb{R}[X]$  :  $P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$ .

D'où, pour tout réel  $x$  :  $P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$

Ainsi :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $P(x) = P(a) + \sum_{k=1}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$ .

En particulier, pour tout réel  $x \geq a$  on a :

$$P(x) = \underbrace{P(a)}_{>0} + \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k}_{\geq 0}$$

**Conclusion.**  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $[x \geq a] \implies [P(x) > 0]$

**EXERCICE 44.** — On considère l'application  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{-x^2}$ .

1/ Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la dérivée  $n$ -ième de  $f$  est  $f^{(n)} : x \in \mathbb{R} \mapsto P_n(x)e^{-x^2}$ , avec  $P_n$  polynôme à coefficients réels. Calculer  $P_0$ ,  $P_1$  et  $P_2$ .

D'après les théorèmes généraux, la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout réel  $x$  on a :  $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ .

Donc, pour tout réel  $x$  on a :  $f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$ .

**Conclusion** :  $P_0 = 1$ ,  $P_1 = -2X$  et  $P_2 = 4X^2 - 2$ .

► Montrons par récurrence sur  $n$  l'existence de  $P_n$ . L'initialisation est fournie par ce qui précède.

Supposons que pour un certain entier naturel  $n$ , il existe un polynôme  $P_n$  à coefficients réels tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2}$$

Alors pour tout réel  $x$  on a :  $f^{(n+1)}(x) = (P'_n(x) - 2xP_n(x))e^{-x^2}$ .

Donc, en posant  $P_{n+1} = P'_n - 2XP_n$ , on a :  $P_{n+1} \in \mathbb{R}[X]$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}(x)e^{-x^2}$

Ce qui prouve l'hérédité de la propriété. Récurrence établie.

2/ Préciser le degré et le coefficient dominant de  $P_n$ .

On prouve par récurrence sur  $\mathbb{N}$  que<sup>9</sup> :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) = n \quad \text{et} \quad \text{cd}(P_n) = (-1)^n 2^n$$

9. La preuve est analogue à celle faite sur les polynômes de Tchebychev, dans Maths8.

3/ Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a :  $P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) + 2nP_{n-1}(x) = 0$ .

On pourra utiliser le fait que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2xf(x)$ .

Application de la formule de Leibniz.

**EXERCICE 45.** — (DÉCOMPOSITION EN IRRÉDUCTIBLES).

Décomposer en polynômes irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$  puis dans  $\mathbb{R}[X]$  les polynômes :

$$1/ P = X^4 - X$$

$$2/ Q = X^6 + X^4 + X^2 + 1$$

$$1/ \text{ On a : } P = X^4 - X = X(X^3 - 1).$$

On en déduit que la décomposition en irréductibles de  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$  est :  $P = X(X - 1)(X - j)(X - \bar{j})$

Et dans  $\mathbb{R}[X]$  :  $P = X(X - 1)(X^2 + X + 1)$ .

Déterminons les racines du polynôme  $Q$ .

On a :  $Q(z) = 0 \iff z^6 + z^4 + z^2 + 1 = 0 \iff Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0$  en ayant posé  $Z = z^2$ . Les racines du polynôme  $X^3 + X^2 + X + 1$  étant  $-1$  et  $\pm i$ , on en déduit que :

$$Q(z) = 0 \iff [z^2 = -1 \vee z^2 = i \vee z^2 = -i] \iff [z = \pm i \vee z = \pm e^{i\pi/4} \vee z = \pm e^{-i\pi/4}]$$

La décomposition en irréductibles de  $Q$  dans  $\mathbb{C}[X]$  est donc :

$$X^6 + X^4 + X^2 + 1 = (X - i)(X + i)(X - e^{i\pi/4})(X + e^{i\pi/4})(X - e^{-i\pi/4})(X + e^{-i\pi/4})$$

Par suite, la décomposition en irréductibles de  $Q$  dans  $\mathbb{R}[X]$  est :

$$X^6 + X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$$

**EXERCICE 46.** — (Multiplicité, décomposition en irréductibles,  $\mathbb{U}_3$ ). On pose :

$$P = (X^4 - X)(X^2 + X + 1)$$

1/ Déterminer les racines dans  $\mathbb{C}$ , ainsi que les multiplicités, du polynôme  $P$ .

$$\text{On a : } P = X(X^3 - 1)(X^2 + X + 1) = X(X - 1)(X^2 + X + 1)^2$$

$$\text{D'où : } P = X(X - 1)(X - j)^2(X - \bar{j})^2.$$

**Conclusion.** Les racines de  $P$  sont 0 (multiplicité 1), 1 (multiplicité 1),  $j$  (multiplicité 2) et  $\bar{j}$  (multiplicité 2).

2/ Déterminer la décomposition en irréductibles du polynôme  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$ , puis dans  $\mathbb{R}[X]$ .

D'après la question précédente, la décomposition en irréductibles du polynôme  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$  est :

$$P = X(X - 1)(X - j)^2(X - \bar{j})^2$$

Et la décomposition en irréductibles du polynôme  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$  est :

$$P = X(X - 1)(X^2 + X + 1)^2$$

**EXERCICE 47.** — (Multiplicité,  $\mathbb{U}_3$ ). On pose :

$$P_1 = (X^2 + X + 1)^3 (X - 2)(X^2 + 1)(X^3 - 1); \quad P_2 = (X^2 + X + 1)^2 (X^3 - 1)^2 (X^2 + 1)$$

Déterminer les racines dans  $\mathbb{C}$ , ainsi que les multiplicités, des polynômes  $P_1$  et  $P_2$ .

►  $P_1 = (X^2 + X + 1)^3 (X - 2)(X^2 + 1)(X^3 - 1)$

D'où :  $P_1 = (X - j)^3 (X - \bar{j})^3 (X - 2)(X - i)(X + i)(X - 1)(X - j)(X - \bar{j})$

Finalement :  $P_1 = (X - j)^4 (X - \bar{j})^4 (X - 2)(X - i)(X + i)(X - 1)$

**Conclusion.** Les racines de  $P_1$  sont 1, 2,  $i$  et  $-i$  (de multiplicité 1),  $j$  et  $\bar{j}$  (de multiplicité 4).

►  $P_2 = (X^2 + X + 1)^2 (X^3 - 1)^2 (X^2 + 1)$

D'où :  $P_2 = (X - j)^2 (X - \bar{j})^2 (X - 1)^2 (X - j)^2 (X - \bar{j})^2 (X - i)(X + i)$

Finalement :  $P_2 = (X - j)^4 (X - \bar{j})^4 (X - 1)^2 (X - i)(X + i)$

**Conclusion.** Les racines de  $P_2$  sont  $i$  et  $-i$  (de multiplicité 1), 1 (de multiplicité 2),  $j$  et  $\bar{j}$  (de multiplicité 4).

**EXERCICE 48.** — (Un exo pas trop complexe). Soit  $P$  un polynôme non nul de  $\mathbb{R}[X]$ .

On suppose que  $i$  et  $j$  sont racines de  $P$ .

Etablir que  $P$  n'est pas irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Puisque  $i$  et  $j$  sont racines de  $P$ , et que  $P$  est à coefficients réels,  $\bar{i} = -i$  et  $\bar{j}$  sont également racines de  $P$ .

Il s'ensuit que  $P$  est divisible dans  $\mathbb{R}[X]$  par :  $(X - i)(X + i)(X - j)(X - \bar{j}) = (X^2 + 1)(X^2 + X + 1)$ .

En outre,  $P$  étant non nul par hypothèse, on peut affirmer que :

$$\exists Q \in \mathbb{R}[X] \setminus \{\tilde{0}\}, \quad P = (X^2 + 1)(X^2 + X + 1)Q$$

Ce qui implique que :  $\deg(P) \geq 4$ .

**Conclusion.**  $P$  n'est pas irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$  (ni a fortiori dans  $\mathbb{C}[X]$ ) puisque les polynômes irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  sont les polynômes de degré 1, et les polynômes de degré 2 sans racine réelle.

**EXERCICE 49.** — (Utilisation des racines 5-èmes de l'unité). On pose :

$$P = \sum_{k=0}^4 X^k \quad \text{càd} \quad P = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$

Déterminer la décomposition en irréductibles du polynôme  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$ , puis dans  $\mathbb{R}[X]$ .

D'après le cours sur les complexes :

$$P = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_5 \setminus \{1\}} (X - \omega) = \prod_{k=1}^4 (X - e^{2ik\pi/5})$$

On en déduit la décomposition en irréductibles de  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$  :

$$P = (X - e^{2i\pi/5})(X - e^{4i\pi/5})(X - e^{6i\pi/5})(X - e^{8i\pi/5})$$

On peut d'ailleurs réécrire cette égalité :

$$P = (X - e^{2i\pi/5}) (X - e^{4i\pi/5}) (X - \overline{e^{4i\pi/5}}) (X - \overline{e^{2i\pi/5}})$$

Il s'ensuit que la décomposition en irréductibles de  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$  est :

$$P = \left( X^2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) X + 1 \right) \left( X^2 - 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) X + 1 \right) \quad (\spadesuit)$$

Si on veut aller plus loin, on peut retrouver la valeur exacte de  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ .

On rappelle que la somme des racines 5-èmes de l'unité est nulle :  $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_5} \omega = 0$ .

Explicitement :  $\sum_{k=0}^4 e^{2ik\pi/5} = 0$ . En particulier :  $\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^4 e^{2ik\pi/5}\right) = 0$ .

D'où :  $\sum_{k=0}^4 \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) = 0$ . D'où :  $1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = 0$

On peut alors observer que :  $\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$  et  $\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ .<sup>10</sup>

Ainsi :  $1 + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0$ .

Or, d'après la formule de duplication, on a :  $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1$ .

On a donc :  $4 \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 = 0$ .

On en déduit que  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$  est solution de l'équation du second degré  $4X^2 + 2X - 1 = 0$ , qui possède exactement deux solutions réelles :  $X_{+,-} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$ .

Il reste à observer que  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$  est positif (puisque  $2\pi/5$  est compris entre 0 et  $\pi/2$ ) pour conclure que :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \quad (\clubsuit)$$

D'après  $(\spadesuit)$  et  $(\clubsuit)$ , la décomposition en irréductibles de  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$  est :

$$P = \left( X^2 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} X + 1 \right) \left( X^2 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} X + 1 \right)$$

10. Par une double application de la formule :  $\cos(2\pi - \theta) = \cos(\theta)$ .

**EXERCICE 50.** — (A propos des polynômes de Tchebychev).

On définit une suite de polynômes  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en posant

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

Ces polynômes sont appelés *polynômes de Tchebychev de première espèce*.

1/ Expliciter  $T_2$  et  $T_3$ .

D'après l'énoncé :  $T_2 = 2XT_1 - T_0 \iff T_2 = 2X^2 - 1$ .

Puis :  $T_3 = 2XT_2 - T_1 \iff T_3 = 4X^3 - 3X$ .

2/ Pour tout entier naturel  $n$ , déterminer le degré de  $T_n$  et son coefficient dominant.

D'après la question précédente, on peut conjecturer que  $\deg(T_n) = n$  et  $\text{cd}(T_n) = 2^{n-1}$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Ces deux assertions se prouvent par récurrence **double** sur  $n$ . Observez qu'une seule récurrence suffit pour établir simultanément les deux propriétés.

Montrons que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\deg(T_n) = n$  et  $\text{cd}(T_n) = 2^{n-1}$  par récurrence double sur  $n$ . Notons :

$$\mathcal{P}(n) : \text{“} \deg(T_n) = n \text{ et } \text{cd}(T_n) = 2^{n-1} \text{”}$$

► Initialisation (pour  $n = 1$  et  $n = 2$ ) : on a  $T_1 = X$  et  $T_2 = 2X^2 - 1$ . On observe que  $\deg(T_1) = 1$  et  $\deg(T_2) = 2$ ; et  $\text{cd}(T_1) = 2^0$  et  $\text{cd}(T_2) = 2^1$ . Donc les propriétés  $\mathcal{P}(1)$  et  $\mathcal{P}(2)$  sont vraies.

► Hérédité : supposons la propriété vraie aux rangs  $n$  et  $n + 1$  pour un certain entier naturel non nul  $n$ . On exploite alors la relation  $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ .

Dans le terme de droite de cette égalité, le degré de  $2XT_{n+1}$  est par hypothèse de récurrence, égal à  $1 + (n + 1) = n + 2$ ; tandis que celui de  $T_n$  est égal à  $n$  (toujours par hypothèse de récurrence).

Puisque  $\deg(2XT_{n+1}) > \deg(T_n)$ , on en déduit d'une part que  $\deg(2XT_{n+1} - T_n) = \deg(2XT_{n+1}) = n + 2$ , et d'autre part que :  $\text{cd}(2XT_{n+1} - T_n) = \text{cd}(2XT_{n+1}) = 2\text{cd}(T_{n+1})$ .

Or, par hypothèse de récurrence,  $\text{cd}(T_{n+1}) = 2^n$ , donc :  $\text{cd}(2XT_{n+1}) = 2^{n+1}$ .

En résumé, on a établi que :  $\deg(T_{n+2}) = n + 2$  et  $\text{cd}(T_{n+2}) = 2^{n+1}$ , ce qui signifie que la propriété  $\mathcal{P}(n + 2)$  est vraie, et prouve l'hérédité.

Conclusion :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\deg(T_n) = n$  et  $\text{cd}(T_n) = 2^{n-1}$

3/ Etablir que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\forall \theta \in \mathbb{R}$ ,  $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$

Par récurrence (double encore une fois) sur  $n$ .

Notons  $P(n)$  : “ $\forall \theta \in \mathbb{R}$ ,  $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ ” pour tout entier naturel  $n$ .

► Initialisation (pour  $n = 0$  et  $n = 1$ ) : d'une part  $T_0 = 1$  d'où pour tout réel  $\theta$  on a :  $T_0(\cos(\theta)) = 1$ . D'autre part, pour tout réel  $\theta$  on a :  $\cos(0 \times \theta) = 1$ . Donc  $P(0)$  est vraie.

D'une part  $T_1 = X$  d'où pour tout réel  $\theta$  on a :  $T_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$ . D'autre part, pour tout réel  $\theta$  on a :  $\cos(1 \times \theta) = \cos(\theta)$ . Donc  $P(1)$  est vraie.

► Hérédité : supposons la propriété vraie aux rangs  $n$  et  $n + 1$  pour un certain entier naturel  $n$ . Alors, pour tout réel  $\theta$  on a :

$$T_{n+2}(\cos(\theta)) = 2 \cos(\theta) \underbrace{T_{n+1}(\cos(\theta))}_{=_{HR} \cos((n+1)\theta)} - \underbrace{T_n(\cos(\theta))}_{=_{HR} \cos(n\theta)} = 2 \cos(\theta) \cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta)$$

$$= \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) - \cos(n\theta) \text{ d'où : } T_{n+2}(\cos(\theta)) = \cos((n+2)\theta)$$

Ce qui assure que la propriété  $P(n+2)$  est vraie, et prouve l'hérédité de la propriété.

**Conclusion** :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$

4/ Soit à présent  $n$  un entier naturel non nul. Montrer que  $T_n$  admet  $n$  racines deux à deux distinctes dans l'intervalle  $[-1, 1]$ .

Soit  $n$  un entier naturel non nul. On cherche les racines de  $T_n$  appartenant à l'intervalle  $[-1, 1]$ .

Considérons donc  $x$  un réel de cet intervalle tel que :  $T_n(x) = 0$ . Puisque  $x$  est compris entre  $-1$  et  $1$ , il existe un unique réel  $\theta$  dans  $[0, \pi]$  tel que  $x = \cos(\theta)$ . On a alors :

$$\begin{aligned} T_n(x) = 0 &\iff T_n(\cos(\theta)) = 0 \iff \cos(n\theta) = 0 \iff n\theta \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \iff \theta \equiv \frac{\pi}{2n} \pmod{\frac{\pi}{n}} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{\pi}{2n} + k \frac{\pi}{n} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \end{aligned}$$

Posons alors, pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ . Il est clair que les réels  $\theta_k$  sont  $n$  réels distincts de  $[0, \pi]$ . Puisque la restriction de la fonction  $\cos$  à l'intervalle  $[0, \pi]$  est injective, les réels  $(\cos(\theta_k))_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$  sont  $n$  réels distincts de l'intervalle  $[-1, 1]$ ; qui plus est, ce sont (par construction)  $n$  racines distinctes du polynôme  $T_n$ .

**Conclusion** : pour tout entier naturel  $n$  non nul, le polynôme  $T_n$  possède  $n$  racines distinctes qui sont les réels :  $\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$  avec  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ .

### EXERCICE 51. — (A propos des polynômes de Tchebychev).

L'objectif de cet exo est d'établir que pour tout entier naturel  $n$ , il existe un unique polynôme  $T_n$  à coefficients réels tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

Cet unique polynôme  $T_n$  est appelé  **$n$ -ème polynôme de Tchebychev** (de première espèce).

1/ **Unicité.** Soit  $n$  un entier naturel, et soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes tels que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad P(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) \wedge Q(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

Montrer que  $P = Q$ .

D'après l'énoncé, pour tout réel  $\theta$ , on a :  $P(\cos(\theta)) = Q(\cos(\theta))$ . Il s'ensuit que  $P$  et  $Q$  coïncident en une infinité de réels (tous les réels de  $[-1, 1]$ ). D'après le principe du prolongement algébrique, ils sont égaux.

**Conclusion.**  $[\forall \theta \in \mathbb{R}, P(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) \wedge Q(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)] \implies [P = Q]$ .

2/ **Existence et expression.** Soient  $n$  un entier naturel et  $\theta$  un réel.

a/ Etablir que : 
$$\cos(n\theta) = \operatorname{Re} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k \sin^k(\theta) \cos^{n-k}(\theta) \right)$$

D'après la formule de Moivre :  $\cos(n\theta) = \operatorname{Re} [(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n]$ .

D'après la formule du binôme de Newton : 
$$\cos(n\theta) = \operatorname{Re} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k \sin^k(\theta) \cos^{n-k}(\theta) \right).$$

**Conclusion.**  $\forall (n, \theta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, \cos(n\theta) = \operatorname{Re} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k \sin^k(\theta) \cos^{n-k}(\theta) \right)$

b/ Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Dédurre de ce qui précède que : 
$$T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (X^2 - 1)^k X^{n-2k}.$$

Soient  $\theta$  un réel et  $n$  un entier naturel. D'après la question précédente, on a :

$$\cos(n\theta) = \operatorname{Re} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k \sin^k(\theta) \cos^{n-k}(\theta) \right)$$

Puisque  $i^k$  est réel si et seulement si  $k$  est pair, on a donc :

$$\cos(n\theta) = \sum_{k=0, k \text{ pair}}^n \binom{n}{k} i^k \sin^k(\theta) \cos^{n-k}(\theta)$$

Il reste à observer que les entiers pairs compris entre 0 et  $n$  sont exactement ceux de l'ensemble :

$$\{2k' / k' \in [0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor]\}$$

On en déduit que : 
$$\cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k \sin^{2k}(\theta) \cos^{n-2k}(\theta) \quad (\spadesuit)$$

Or : 
$$(-1)^k \sin^{2k}(\theta) = (-\sin^2(\theta))^k = (\cos^2(\theta) - 1)^k \quad (\clubsuit)$$

D'après  $(\spadesuit)$  et  $(\clubsuit)$  : 
$$\cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (\cos^2(\theta) - 1)^k \cos^{n-2k}(\theta)$$

On pose alors : 
$$T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (X^2 - 1)^k X^{n-2k}.$$

Il résulte des calculs précédents que :  $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ . D'après la question 1,  $T_n$  est l'unique polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  tel que :  $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ .

**Conclusion.** Le  $n$ -ème polynôme de Tchebychev est : 
$$T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (X^2 - 1)^k X^{n-2k}.$$