

Chapitre 18 : Analyse asymptotique

1 – Négligeabilité

Définition. Une fonction f est **négligeable devant g au voisinage de a** s'il existe une fonction ε définie au voisinage de a telle que : $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$.

Notation. On peut noter : $f = o_a(g)$, ou $f(x) = o_a(g(x))$.

Propriété. (caractérisation de la négligeabilité). Sous réserve que g ne s'annule pas sur un voisinage de a , on a : $f = o_a(g)$ SSI $\lim_a \frac{f}{g} = 0$.

Remarque. $f = o_a(1)$ SSI $\lim_a f = 0$.

Autres propriétés : négligeabilité et opérations algébriques, transitivité de la négligeabilité.

► **Echelle de négligeabilité en $+\infty$**

$$e^{-x} \ll \frac{1}{x^2} \ll \frac{1}{x} \ll \frac{1}{\ln x} \ll 1 \ll x \ll x^2 \ll e^x$$

► **Synthèse — Echelle de négligeabilité en 0^+**

$$x^2 \ll x \ll \sqrt{x} \ll \frac{1}{\ln x} \ll 1 \ll \ln x \ll \frac{1}{\sqrt{x}} \ll \frac{1}{x} \ll \frac{1}{x^2}$$

2 – Domination (pas encore vue en cours)

Définition. Une fonction f est **dominée par g au voisinage de a** s'il existe un réel $M \in \mathbb{R}_+$ tel que sur un voisinage de a on ait : $|f(x)| \leq M |g(x)|$.

Notation. On note : $f = O_a(g)$, ou $f(x) = O_a(g(x))$.

Propriété. (caractérisation de la domination). Sous réserve que g ne s'annule pas sur un voisinage de a , on a : $f = O_a(g)$ SSI $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a .

3 – Equivalents

Définition. Deux fonctions f et g sont **équivalentes au voisinage de a** s'il existe une fonction φ définie au voisinage de a telle que : $f(x) = g(x)\varphi(x)$.

Notation. On note : $f \sim_a g$, ou $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$.

Propriété. (caractérisation de l'équivalence). Sous réserve que g ne s'annule pas sur un voisinage de a , on a : $f \sim_a g$ SSI $\lim_a \frac{f}{g} = 1$.

Propriété. $f \sim_a g$ SSI $f = g + o_a(g)$.

Propriété. (équivalents et opérations algébriques).

- 1) Si $f_1 \sim_a f_2$ et $g_1 \sim_a g_2$ alors : $f_1 g_1 \sim_a f_2 g_2$
- 2) Si $f_1 \sim_a f_2$ et $g_1 \sim_a g_2$ alors : $\frac{f_1}{g_1} \sim_a \frac{f_2}{g_2}$ (sous réserve...)

Remarque : en revanche, on ne peut pas sommer les équivalents !

Extrêmement utile en pratique :

Propriété essentielle. Si $f \sim_a g$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell \in \bar{\mathbb{R}}$ ou $\in \mathbb{C}$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$

4 – Développements limités

A – Généralités

Définition. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle ouvert non-vide, soit $a \in I$ et soit n un entier naturel. La fonction f admet un **développement limité à l'ordre n au voisinage de a** s'il existe $(n+1)$ scalaires a_0, a_1, \dots, a_n tels que :

$$\forall x \in I, f(x) = \left[\sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k \right] + o((x-a)^n)$$

Propriété. Si f admet un DL à l'ordre n en a , il est unique.

B - Construction

Théorème (FORMULE DE TAYLOR-YOUNG) : si $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$, alors f admet un DL à l'ordre n en a , explicitement :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \left[\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] + o((x-a)^n)$$

En particulier lorsque $a = 0$:

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \left[\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right] + o(x^n)$$

QUESTIONS DE COURS

- **Exercice.** Calcul de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)}$.
- **Exercice.** Calcul de $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{\sin(x-a)}$ avec $0 < a < \frac{\pi}{2}$
- **Exercice.** Equation de la tangente T à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0, et position relative de \mathcal{C}_f et de T au voisinage de 0, avec $f(x) = \ln(1+x+x^2)\sqrt{1+2x}$
- **Exercice.** Equation de l'asymptote D à la courbe représentative de $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$ au voisinage de $+\infty$, et position relative \mathcal{C}_f et D .
- **Exercice.** Calcul de $\ell_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $\ell_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ et $\ell_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$

Application : début du formulaire des DL usuels (exp, cos, sin, ch, sh, $1/(1-x)$, $(1+x)^\alpha$).

C - DL et opérations algébriques

Règles donnant le DL d'une somme, d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'une composée et d'une primitive.

Application : fin du formulaire des DL usuels ($\ln(1+x)$, arctan, arccos, arcsin).

D - Quelques applications des DL

Calculs de limites, d'équivalents, de tangentes (et positions relatives locales), d'asymptotes (et positions relatives locales).

SUR LE PRINCIPE DU VOLONTARIAT

► **Formule de Taylor-Young.**

(en admettant : " $\int_a^x o_a((t-a)^n) dt = o_a((x-a)^{n+1})$ ").

► **Application de la formule de Taylor 1.** DL en 0 à l'ordre $2n$ de cos.

► **Application de la formule de Taylor 2.** DL en 0 à l'ordre n de $f : x \mapsto 1/(1-x)$. En déduire le DL en 0 à l'ordre $(2n+1)$ de la fonction arctangente.