Devoir surveillé de Mathématiques n^{0}9 — 18 mars 2023

Durée : 3 heures — Calculatrices interdites

Tous les résultats doivent être encadrés ou soulignés

Les exercices 1 et 2 sont communs ; puis vous traiterez au choix l'un des deux exercices "BLANC" ou "ORANGE"

Exercice 1 — (Matrices définies par blocs)

Partie A - Matrices de rotation

Pour tout réel θ, on définit la matrice $R(\theta) \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ en posant :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

On a déjà établi en TD cette année que :

$$\forall\, (\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2, \quad R(\theta)\, R(\varphi) = R(\theta + \varphi)$$

Au besoin, ce résultat pourra être utilisé sans justification au cours de cet exercice.

1/ Etablir que :

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ R(\theta) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (R(\theta))^{-1} = R(-\theta)$$

2/ Etablir que :

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{Z},\ (R(\theta))^n = R(n\theta)$$

3/ Soit m un entier naturel supérieur ou égal à 2, et soit N un entier naturel. Montrer que :

$$\left[\left(R\left(\frac{\pi}{m}\right)\right)^N = \mathrm{I}_2\right] \Longleftrightarrow [N \equiv 0\,[2m]]$$

Partie B - Matrices par blocs

Dans cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 2. Dans $\mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R})$, on considère l'ensemble $\mathbf{E}$ des matrices s'écrivant :

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})} \\ \hline 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})} & B \end{array}\right) \qquad \text{avec } A \text{ et } B \text{ dans } \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$$

Formellement, une matrice $M = (m_{ij})$ de $\mathbf{E}$ est une matrice dans $\mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont tels que :

$$\forall\ (i,j) \in [\![\, 1, 2n \,]\!]^2, \quad \begin{cases} [i > n \text{ et } j \leqslant n] \Longrightarrow m_{ij} = 0 \\ \\ [i \leqslant n \text{ et } j > n] \Longrightarrow m_{ij} = 0 \end{cases}$$

4/ Soient U et V deux matrices de $\mathbf{E}$, notées :

$$U = \left(\begin{array}{c|c} A & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})} \\ \hline 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})} & B \end{array}\right) \qquad \text{et} \qquad V = \left(\begin{array}{c|c} C & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})} \\ \hline 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})} & D \end{array}\right) \qquad \text{avec } A,\ B,\ C \text{ et } D \text{ dans } \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$$

Etablir que $UV \in \mathbf{E}$.

Dans la suite de l'exercice, on pourra admettre que : $UV = \left(\begin{array}{c|c} AC & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})} \\ \hline 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})} & BD \end{array}\right).$

5/ Un cas particulier. On considère la matrice $W \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ ci-dessous :

$$W = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

a/ Etablir que W est inversible, et préciser son inverse.

b/ Soit q un entier naturel. Montrer que :

$$[W^q = \mathbf{I}_4] \Longleftrightarrow [q \equiv 0 \ \ [24]]$$

Exercice 2 — (Autour de la fonction arcsinus)

L'objectif de cet exercice est de prouver des propriétés de la fonction arcsinus complétant ce qui a été fait en classe.

En premier lieu, nous avons établi que la fonction arcsinus est dérivable sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$ *; mais à l'époque où nous avons étudié cette fonction, nous n'avions rien pu démontrer quant à sa dérivabilité en* 1 *(ni en* -1*). Nous avions simplement pu nous convaincre que arcsinus n'est pas dérivable en* 1*, car "ça se voit sur le graphique"...*

Heureusement, la preuve rigoureuse de la non-dérivabilité de arcsinus en 1 *peut être faite grâce aux DL. C'est l'objectif de la partie A, totalement indépendante des deux suivantes.*

Les parties B et C sont en revanche intimement liées. L'objectif de la première est d'établir la formule générale donnant le DL en 0 à un ordre quelconque de $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$*. Cette formule est utilisée pour obtenir dans la dernière partie le DL en 0 à un ordre quelconque de la fonction arcsinus.*

Partie A - Non-dérivabilité à gauche de 1 de la fonction arcsinus

1/ Etablir le développement limité à l'ordre 2 en $\dfrac{\pi}{2}$ de la fonction sinus.

2/ Etablir que :

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\arcsin(x) - \dfrac{\pi}{2}}{x-1} = \lim_{u \to (\pi/2)^-} \frac{u - \dfrac{\pi}{2}}{\sin(u) - 1}$$

3/ A l'aide des deux questions précédentes, conclure.

Partie B - Un premier développement limité

Soit f la fonction définie sur $I =]-1,1[$ en posant :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = (1+x)^{\alpha} \qquad \text{où } \alpha \text{ désigne un réel non nul.}$$

Le but de cette partie est de déterminer le développement limité à l'ordre n (n étant un entier arbitraire) en 0 de la fonction f.

4/ Justifier brièvement que f admet un développement limité à tout ordre n en 0; puis rappeler (sans justifications supplémentaires) le développement limité à l'ordre 3 en 0 de f.

5/ Justifier brièvement que pour tout réel $x \in I$, on a : $\quad (1+x)\, f'(x) = \alpha f(x)$.

6/ En déduire à l'aide de la formule de Leibniz que pour tout entier naturel k on a :

$$f^{(k+1)}(0) = (\alpha - k)\, f^{(k)}(0)$$

7/ Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \; f^{(k)}(0) = \prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j)$$

Partie C - DL en 0 à tout ordre de $x \longmapsto 1/\sqrt{1+x}$, et de la fonction arcsinus

8/ A l'aide de la partie précédente, montrer que :

$$\forall x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{(-1)^k}{2^k \times (k!)} \prod_{i=0}^{k-1} (1+2i) \right] x^k + o\left(x^n\right)$$

9/ Etablir que : $\quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\prod_{i=0}^{k-1} (1+2i) = \frac{(2k)!}{2^k \times (k!)}$

10/ En déduire que :

$$\forall x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{(-1)^k}{2^{2k}} \binom{2k}{k} \right] x^k + o\left(x^n\right)$$

11/ Dans cette question, n désigne encore un entier naturel non nul. Déterminer le développement limité à l'ordre $2n+2$ en 0 de la fonction arcsinus.

Exercice BLANC — Arithmétique

Notations. On rappelle que pour tout m entier relatif, $m\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des multiples de m. Par ailleurs, on note $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On admettra dans cet exercice que $41 \in \mathscr{P}$.

1/ Sans calculer leur PGCD, justifier que les entiers 18 et 41 sont premiers entre eux.

2/ Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $\quad (E_1) \quad 18x + 41y = 3$.

3/ Soit $n \in \mathbb{Z}$, tel que $n \notin 41\mathbb{Z}$. A l'aide du petit théorème de Fermat, établir que :

$$41 | n^{40} - 1$$

4/ Etablir qu'il n'existe pas de triplet d'entiers (x, y, z) tel que : $x^{40} + y^{40} + z^{40} = 123 \times 19^{2023} + 8$.

5/ **Un cas particulier du théorème de Dirichlet**. La fin de cet exercice consiste à établir qu'il existe une infinité de nombre premiers congrus à 1 modulo 4 (comme 41).

Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe seulement un nombre fini $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_m$ de nombres premiers congrus à 1 modulo 4.

On pose : $\quad N = 1 + 4 \times \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{m} p_k^2 \right) \quad$ soit : $N = 1 + 4\left(p_1 \times \cdots \times p_m\right)^2$.

Soit p un diviseur premier de N.

a/ Justifier que $p \geqslant 3$.

b/ On note : $x = 2 \displaystyle\prod_{k=1}^{m} p_k$. $\quad$ Calculer $x^2 + 1$ modulo p.

c/ Etablir que p ne divise pas x. En déduire que : $x^{p-1} \equiv 1\ [p]$.

d/ Justifier que $\dfrac{p-1}{2}$ est un entier naturel, et établir que : $(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1\ [p]$.

e/ En déduire que : $\quad p \equiv 1\ [4]$. $\quad$ En exhibant une contradiction, conclure.

Exercice ORANGE — Groupes et arithmétique

Partie A - Sous-groupe engendré par un élément dans un groupe

Soient $(G, *)$ un groupe d'élément neutre e, et g un élément de G.

On note $g^2 = g * g$, $g^3 = g * g * g$. Plus généralement, pour tout entier naturel n, on note $g^n = \underbrace{g * g * \cdots * g}_{\text{avec } n \text{ g}}$

Cette notation peut être étendue aux entiers relatifs ; si n est un entier négatif, on pose : $g^n = (g^{-1})^{-n}$ pour se ramener à la définition précédente.

Enfin, on convient que $g^0 = \mathrm{e}$, et que $g^1 = g$.

1/ On note : $\langle g \rangle = \left\{ g^k \,,\, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Montrer que $(\langle g \rangle \,, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$.

2/ On suppose dans cette question que g est **d'ordre fini**, càd qu'il existe un entier naturel N non nul tel que $g^N = \mathrm{e}$ (et cet entier N est appelé l'**ordre de** g).

a/ Démontrer que :

$$\langle g \rangle = \left\{ g^k,\ k \in [\![\, 0, N-1 \,]\!] \right\}$$

b/ Démontrer avec soin que : $\quad \mathrm{Card}\,(\langle g \rangle) = N$

Partie B - Ordre d'un élément dans un groupe fini

Tout au long de cette partie, $(G, *)$ désigne un groupe d'élément neutre e. On suppose en outre que G est fini, de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(H, *)$ un sous-groupe de G. Pour tout élément g de G, on note : $gH = \{ g * h \,/\, h \in H \}$.

3/ Etablir que pour tout élément g de G, on a : $\mathrm{Card}\,(gH) = \mathrm{Card}\,(H)$.

4/ Soient g et g' deux éléments de G. Montrer que les ensembles gH et $g'H$ sont soit égaux, soit disjoints.

5/ En déduire que le cardinal de H divise celui de G.

6/ **Application.** Montrer que si G est fini de cardinal n, alors : $\quad \forall\, g \in G,\ g^n = \mathrm{e}$.

Partie C - Sous-groupes finis de $\mathbb{U}$

7/ Soit $(G, \times)$ un sous-groupe fini de $(\mathbb{U}, \times)$. Montrer qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $G = \mathbb{U}_n$.

8/ Soient m et n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que : $\quad [\mathbb{U}_m \subset \mathbb{U}_n] \Longleftrightarrow [m \,|\, n]$.

9/ Soient m et n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que : $\quad \mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n = \mathbb{U}_{m \wedge n}$.