Colle 21 – Questions de cours

Question de cours 1. — **Propriété**. Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, le reste dans la division euclidienne du polynôme P par le polynôme $(X-\alpha)$ est le polynôme constant $\widetilde{P}(\alpha)$.

ET Conséquence : α est racine de P SSI $(X-\alpha)$ divise P.

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. D'après le théorème de la division euclidienne : $\exists!(Q,R) \in \mathbb{K}[X]^2,\ P=(X-\alpha)Q+R$, avec $\deg(R)<1$. Puisque le degré de R est négatif ou nul, R est constant : $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ R=\lambda$.

On a alors : $P=(X-\alpha)Q+\lambda$. L'évaluation en α de cette relation donne $P(\alpha)=\lambda$ et la conclusion du lemme.

Conséquence. Supposons que α soit racine de P. Alors $P(\alpha)=0$ (par définition de racine), et le reste de la division euclidienne de P par $(X-\alpha)$ est nul (d'après le lemme). Il s'ensuit que $(X-\alpha)|P$. Ainsi : $[\alpha \text{ racine de } P] \Longrightarrow [(X-\alpha)|P]$.
La réciproque est triviale. **Conclusion**. α est racine de P SSI $(X-\alpha)|P$.

Question de cours 2. — **Exercice (polynômes interpolateurs de Lagrange 1)**. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(-1)=x$, $P(0)=y$ et $P(1)=z$.

Remarque. *Il revient au même de dire que l'application* $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $P \longmapsto (P(-1),P(0),P(1))$ *est bijective.*

Existence. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

On introduit les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux valeurs -1, 0 et 1. Explicitement, il s'agit des polynômes L_{-1}, L_0 et L_1 respectivement définis par :

$$L_{-1}=\frac{1}{2}X\,(X-1)\,; \qquad L_0=-\left(X^2-1\right); \qquad L_1=\frac{1}{2}X\,(X+1)$$

Ces trois polynômes sont clairement des éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ (tous trois sont de degré 2), et vérifient les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} L_{-1}(-1)=1 \\ L_{-1}(0)=0 \\ L_{-1}(1)=0 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} L_0(-1)=0 \\ L_0(0)=1 \\ L_0(1)=0 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} L_1(-1)=0 \\ L_1(0)=0 \\ L_1(1)=1 \end{cases}$$

On pose alors : $P=xL_{-1}+yL_0+zL_1$. Il résulte des propriétés ci-dessus que P est un polynôme de degré au plus 2, et on vérifie aisément que : $P(-1)=x$, $P(0)=y$ et $P(1)=z$.

Ce qui prouve l'existence d'un polynôme $P\in\mathbb{R}_2[X]$ répondant à la question.

Unicité. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ solutions du problème.

On a alors $P(-1)=Q(-1)$, $P(0)=Q(0)$ et $P(1)=Q(1)$. Puisque les polynômes P et Q sont de degré au plus 2, et qu'ils prennent les mêmes valeurs en trois scalaires distincts, le principe du prolongement algébrique implique que : $P=Q$.

Ce qui prouve l'unicité du polynôme $P\in\mathbb{R}_2[X]$ répondant à la question.

Conclusion. Pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, il existe un unique polynôme $P\in\mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(-1)=x$, $P(0)=y$ et $P(1)=z$.

Question de cours 3. — **Théorème**. Soient $P\in\mathbb{K}[X]$, $\alpha\in\mathbb{K}$ et $m\in\mathbb{N}^*$. Le scalaire α est racine de P de multiplicité au moins m SSI $P(\alpha)=P'(\alpha)=\cdots=P^{(m-1)}(\alpha)=0$.

➤ Sens direct. Supposons que α est racine de P de multiplicité au moins m. Il existe alors un polynôme Q tel que : $P=(X-\alpha)^mQ$.

Soit alors k un entier quelconque de $[\![\,0,m-1\,]\!]$. On a (via la formule de Leibniz) :

$$P^{(k)}=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left[(X-\alpha)^m\right]^{(i)}Q^{(k-i)}=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{m!}{(m-i)!}\,(X-\alpha)^{m-i}\,Q^{(k-i)}$$

En évaluant en α cette relation, on obtient : $P^{(k)}(\alpha)=\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{m!}{(m-i)!}\underbrace{0^{m-i}}_{=0 \text{ car } i<m}Q^{(k-i)}(\alpha)$ d'où $P^{(k)}(\alpha)=0$.

On a donc établir l'implication : $[\alpha \text{ est racine de } P \text{ de multiplicité au moins } m] \Longrightarrow \left[\forall k\in[\![\,0,n-1\,]\!],\ P^{(k)}(\alpha)=0\right]$.

➤ Réciproque. Supposons que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ P^{(k)}(\alpha) = 0$.

D'après la formule de Taylor, on peut écrire : $P = \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k}_{\text{nulle par hypothèse}} + \sum_{k=m}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$.

Par suite : $P = \sum_{k=m}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$ càd : $P = (X-\alpha)^m \sum_{k=m}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^{\overbrace{k-m}^{\geqslant 0}}$.

Il s'ensuit que $(X-\alpha)^m \,|P$, ce qui signifie que α est racine de multiplicité au moins égale à m de P.

Conclusion. $[\alpha$ est racine de P de multiplicité au moins $m] \Longleftrightarrow \left[\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ P^{(k)}(\alpha) = 0\right]$

QUESTION DE COURS 4. — **Exercice Tchebychev 1**. On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant

$$T_0 = 1, \qquad T_1 = X, \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

Ces polynômes sont appelés *polynômes de Tchebychev de première espèce.*
Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \deg(T_n) = n$

Récurrence **double**. Notons pour tout n entier naturel : $A(n)$: "$\deg(T_n) = n$"

➤ Initialisation (pour $n=0$ et $n=1$) : d'après l'énoncé $\deg(T_0)=0$ et $\deg(T_1)=1$. Donc $A(0)$ et $A(1)$ sont vraies.

➤ Hérédité : supposons la propriété vraie aux rangs n et $n+1$ pour un certain entier naturel n.

On exploite alors la relation $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

Dans le terme de droite de cette égalité, le degré de $2XT_{n+1}$ est par hypothèse de récurrence, égal à $1+(n+1) = n+2$; tandis que celui de T_n est égal à n (toujours par hypothèse de récurrence).

Puisque $\deg(2XT_{n+1}) > \deg(T_n)$, on en déduit que : $\deg(2XT_{n+1} - T_n) = \deg(2XT_{n+1}) = n+2$.

Ce qui signifie que la propriété $A(n+2)$ est vraie, et prouve l'hérédité.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \deg(T_n) = n$

QUESTION DE COURS 5. — **Exercice Tchebychev 2**. $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

Récurrence double. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Notons P(n) : "$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$" pour tout entier naturel n.

➤ Initialisation (pour $n=0$ et $n=1$) : d'une part $T_0 = 1$ d'où : $T_0(\cos(\theta)) = 1$. D'autre part : $\cos(0\times\theta) = 1$. Donc $P(0)$ est vraie.

D'une part $T_1 = X$ d'où : $T_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$. D'autre part : $\cos(1\times\theta) = \cos(\theta)$. Donc $P(1)$ est vraie.

➤ Hérédité : supposons la propriété vraie aux rangs n et $n+1$ pour un certain entier naturel n. Alors :

$$T_{n+2}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)\underbrace{T_{n+1}(\cos(\theta))}_{=_{HR}\cos((n+1)\theta)} - \underbrace{T_n(\cos(\theta))}_{=_{HR}\cos(n\theta)} = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta)$$

$$= \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) - \cos(n\theta) \text{ d'où : } T_{n+2}(\cos(\theta)) = \cos((n+2)\theta)$$

Ce qui assure que la propriété $P(n+2)$ est vraie, et prouve l'hérédité de la propriété.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$

QUESTION DE COURS 6. — **Théorème (nombre maximal de racines d'un polynôme)** : si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ admet $(n+1)$ racines distinctes, alors $P = \tilde{0}$

ET Corollaire (principe du prolongement algébrique) : soient P et Q dans $\mathbb{K}_n[X]$. S'il existe $(n+1)$ scalaires (càd des éléments de $\mathbb{K}$) $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ distincts tels que : $\forall i \in [\![1, n+1]\!], P(\alpha_i) = Q(\alpha_i)$, alors $P = Q$.

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$, avec $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P possède $(n+1)$ racines 2 à 2 distinctes $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$. Alors P est divisible par $\prod_{i=1}^{n+1}(X-\alpha_i)$. Il existe donc un polynôme Q tel que : $P = Q \times \prod_{i=1}^{n+1}(X-\alpha_i)$.

Si Q est non nul, alors : $\deg\left(Q \times \prod_{i=1}^{n+1}(X-\alpha_i)\right) \geqslant n+1$, et par suite : $\deg\left(Q \times \prod_{i=1}^{n+1}(X-\alpha_i)\right) > \deg(P)$. Contradiction.

Il s'ensuit que Q est nul, ce qui implique que P l'est.

Conclusion. Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ admet $(n+1)$ racines 2 à 2 distinctes, alors $P = 0$.

Preuve du principe du prolongement algébrique. Soient P et Q dans $\mathbb{K}_n[X]$. Supposons qu'il existe $(n+1)$ scalaires $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ 2 à 2 distincts tels que : $\forall\, i \in [\![1,\, n+1]\!], P(\alpha_i) = Q(\alpha_i)$.

On pose judicieusement : $R = P - Q$. Le polynôme R est de degré au plus n (puisque P et Q le sont), et possède $(n+1)$ racines 2 à 2 distinctes par hypothèse. D'après le théorème précédent, $R = 0$, d'où $P = Q$.

Conclusion. Soient P et Q dans $\mathbb{K}_n[X]$. S'il existe $(n+1)$ scalaires $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ deux à deux distincts tels que : $\forall\, i \in [\![1,\, n+1]\!], P(\alpha_i) = Q(\alpha_i)$, alors $P = Q$.

Question de cours 7. — **Exercice (polynômes interpolateurs de Lagrange 2)**. Le polynôme $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \beta_i L_i$ est l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(\alpha_k) = \beta_k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, avec $L_i = \displaystyle\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{X-\alpha_j}{\alpha_i - \alpha_j}$

Remarque. *Cette question de cours généralise la question de cours 2.*

Existence. Soit $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ $(n+1)$ réels (deux à deux distincts, pour enfoncer le clou), et soit $(\beta_0, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
On introduit les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux réels $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$. Explicitement, il s'agit des polynômes L_0, L_1,..., L_n définis en posant :

$$\forall\, k \in [\![0, n]\!],\ L_k = \prod_{i=0,\ i\neq k}^{n} \frac{(X-\alpha_i)}{(\alpha_k - \alpha_i)}$$

Ainsi : $\forall\, (k, j) \in [\![0, n]\!]^2,\ L_k(\alpha_j) = \delta_{kj}$.

Ces polynômes construits, posons : $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \beta_k L_k$. Le polynôme P est de degré au plus n, en tant que combinaison linéaire de polynômes de degré n exactement.

En outre, par construction des polynômes L_k, on a :

$$P(\alpha_0) = \beta_0\,; \qquad P(\alpha_1) = \beta_1\,;\ldots\,; \qquad P(\alpha_n) = \beta_n$$

Ce qui prouve l'existence d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ répondant à la question.

Unicité. Supposons qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}_n[X]$ répondant à la question, alors P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui coïncident en $(n+1)$ points : d'après le principe du prolongement algébrique, ils sont égaux.

Ce qui prouve l'unicité du polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ répondant à la question.

Conclusion. Pour tout $(\beta_0, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que$P(\alpha_k) = \beta_k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

Question de cours 8. — **Formule de Taylor dans $\mathbb{K}[X]$ (en α)** : soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul, et soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors : $P(X)= \displaystyle\sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X-\alpha)^k$

La preuve peut se faire par récurrence sur le degré de P, noté n. Notons :

$$A(n) : \text{“pour } P \in \mathbb{K}[X] \text{ de degré } n,\ P= \sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X-\alpha)^k\text{”}$$

➤ Initialisation $(n=0)$: pour un polynôme de degré 0, càd constant (non nul), on a $P = P(\alpha)$ pour tout scalaire α, ce qui établit l'initialisation.

➤ Hérédité : supposons la propriété vraie au rang n pour un certain entier naturel n. Soit P un polynôme de degré $n+1$. Alors P' étant de degré n, on peut utiliser l'hypothèse de récurrence pour écrire :

$$P' = \sum_{k=0}^{n} \frac{P'^{(k)}(\alpha)}{k!} (X-\alpha)^k \text{ soit : } P' = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k+1)}(\alpha)}{k!} (X-\alpha)^k$$

On en déduit (par intégration formelle) :

$$\exists\, \lambda \in \mathbb{K},\ P = \lambda + \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k+1)}(\alpha)}{(k+1)!} (X-\alpha)^{k+1}$$

Puis, par changement d'indice dans la somme :

$$\exists\,\lambda \in \mathbb{K},\ P = \lambda + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\,(X-\alpha)^k$$

Il reste à observer que $P(\alpha) = \lambda$ (en évaluant en α l'égalité précédente) pour obtenir :

$$P = P(\alpha) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\,(X-\alpha)^k \quad \text{puis} \quad P = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\,(X-\alpha)^k$$

La dernière égalité obtenue signifie que la propriété $A(n+1)$ est vraie, ce qui prouve l'hérédité et achève cette récurrence.

Conclusion : $\forall\, P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\},\ \forall\, \alpha \in \mathbb{K},\ P = \displaystyle\sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\,(X-\alpha)^k$

Question de cours 9. — **Exercice Tchebychev 3**. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Montrer que T_n admet n racines deux à deux distinctes dans l'intervalle $[-1, 1]$.

Soit n un entier, $n \geqslant 2$. On cherche les racines de T_n appartenant à l'intervalle $[-1, 1]$.

Considérons donc x un réel de cet intervalle tel que : $T_n(x) = 0$. Puisque x est compris entre -1 et 1, il existe un unique réel θ dans $[0, \pi]$ tel que $x = \cos(\theta)$. On a alors :

$$T_n(x) = 0 \Longleftrightarrow T_n(\cos(\theta)) = 0 \Longleftrightarrow \cos(n\theta) = 0 \Longleftrightarrow n\theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \Longleftrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{2n}\ \left[\frac{\pi}{n}\right]$$

$$\Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\ \theta = \frac{\pi}{2n} + k\,\frac{\pi}{n} \Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\ \theta = \frac{(2k+1)\,\pi}{2n}$$

Posons alors, pour tout $k \in [\![\, 0, n-1 \,]\!]$, $\theta_k = \dfrac{(2k+1)\,\pi}{2n}$. Il est clair que les réels θ_k sont n réels distincts de $[0, \pi]$. Puisque la restriction de la fonction cos à l'intervalle $[0, \pi]$ est injective, les réels $(\cos(\theta_k))_{k \in [\![0, n-1]\!]}$ sont n réels distincts de l'intervalle $[-1, 1]$; qui plus est, ce sont (par construction) n racines distinctes du polynôme T_n.

Conclusion : pour tout entier naturel n non nul, le polynôme T_n possède n racines distinctes qui sont les réels : $\cos\left(\dfrac{(2k+1)\,\pi}{2n}\right)$ avec $k \in [\![\, 0, n-1 \,]\!]$.

Question de cours 10. — **Propriété**. Dans $\mathbb{K}[X]$ les polynômes de degré 1 sont irréductibles.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, avec $\deg(P) = 1$, et soit D un diviseur de P. Il existe alors $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $DQ = P$. En comparant les degrés des deux termes de cette égalité, on obtient $\deg(D) = 0$ ou $\deg(D) = 1$.
Si $\deg(D) = 0$, alors D est un polynôme constant non nul : $\exists\,\lambda \in \mathbb{K}^*,\ D = \lambda$ (et D est donc associé à 1).
Et lorsque $\deg(D) = 1$, on a $\deg(Q) = 0$, donc $\exists\,\lambda \in \mathbb{K}^*,\ Q = \lambda$, d'où $D = (1/\lambda)P$ (et D est donc associé à P).

On peut conclure que les diviseurs associés à P sont les polynômes associés à 1, et ceux associés à P. Donc P est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$. **Conclusion**. Tout polynôme de degré 1 est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ (pour tout corps $\mathbb{K}$).

Question de cours 11. — **Théorème**. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont exactement ceux de degré 1.

➤ Tout polynôme de degré 1 est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ (pour tout corps $\mathbb{K}$) d'après la propriété faisant l'objet de la question de cours 1.

➤ Montrons que la réciproque est vraie dans $\mathbb{C}[X]$, càd que tout polynôme irréductible à coefficients complexes est de degré 1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme irréductible. Par définition, P est non constant, et donc $\deg(P) \geqslant 1$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\deg(P) \geqslant 2$. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, P admet (au moins) une racine dans $\mathbb{C}$; notons-la z_0. Alors $Q = (X - z_0)$ est un diviseur de P dans $\mathbb{C}[X]$, qui n'est associé ni à 1 (Q étant non constant), ni à P (puisque $\deg(P) \neq 1$) : contradiction. Il s'ensuit que $\deg(P) = 1$.

Ainsi, tout polynôme irréductible de $\mathbb{C}[X]$ est de degré 1.

Conclusion. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont exactement ceux de degré 1.

QUESTION DE COURS 12. — "Demi-Théorème" (une seule implication). Dans $\mathbb{R}[X]$, si un polynôme est irréductible, alors il est de degré 1, ou de degré 2 sans racine réelle.

Montrons que tout polynôme irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ est de l'une des deux formes indiquées dans l'énoncé. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme irréductible. Par définition $\deg(P) \geqslant 1$.

Supposons que P soit de degré 2, avec un discriminant positif ou nul. Alors P admet (au moins) une racine dans $\mathbb{R}$; notons-la z_0. Comme $z_0 \in \mathbb{R}$, alors $Q = (X - z_0)$ est un diviseur de P dans $\mathbb{R}[X]$, qui n'est associé ni à 1 (Q étant non constant), ni à P (puisque $\deg(P) \neq 1$) : contradiction.

Il s'ensuit que si P (irréductible) est de degré 2, alors son discriminant est strictement négatif.

Pour finir, envisageons le cas où $\deg(P) \geqslant 3$. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss [*], P admet (au moins) une racine dans $\mathbb{C}$; notons-la z_0.

☞ Si $z_0 \in \mathbb{R}$: alors $Q = (X - z_0)$ est un diviseur de P dans $\mathbb{R}[X]$, qui n'est associé ni à 1 (Q étant non constant), ni à P (puisque $\deg(P) \neq 1$) : contradiction.

☞ Si $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, alors $\overline{z_0}$ est également racine de P (exo 20...). Les complexes z_0 et $\overline{z_0}$ étant distincts, le polynôme $Q = (X - z_0)(X - \overline{z_0})$, (càd : $Q = X^2 - 2\mathrm{Re}(z_0)X + |z_0|^2$) divise P dans $\mathbb{C}[X]$ (a priori).

Il existe donc un polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que : $P = QR$. On a alors : $\overline{P} = \overline{Q}\,\overline{R}$, et puisque P et Q sont à coefficients réels : $P = Q\overline{R}$. On en déduit que $R = \overline{R}$, [†] d'où $R \in \mathbb{R}[X]$. Ainsi Q divise P dans $\mathbb{R}[X]$; or Q étant de degré 2, il n'est associé ni à 1, ni à P : donc P n'est pas irréductible, contradiction.

Conclusion. Dans $\mathbb{R}[X]$: $\quad [P \text{ irréductible}] \Longrightarrow \begin{cases} \deg(P) = 1 \\ \text{ou} \\ \deg(P) = 2 \textit{ et } \Delta < 0 \end{cases}$

*. Qu'il est légitime d'appliquer au polynôme P, que l'on peut voir comme élément de $\mathbb{C}[X]$, car $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

†. Puisque $Q(R - \overline{R}) = 0$, Q est non nul, et $\mathbb{C}[X]$ est un anneau intègre.

Hors-programme de colle 1. — Théorème (D'Alembert-Gauss).

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède une racine dans $\mathbb{C}$.

NB : cette preuve est hors-programme de colle, et hors-programme tout court, mais pas l'énoncé du théorème !

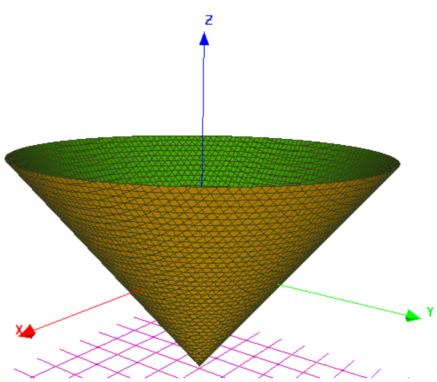
Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, non constant. Notons $n \in \mathbb{N}^*$ son degré, et $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Considérons l'application
$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ z & \longmapsto & |P(z)| \end{array}$$

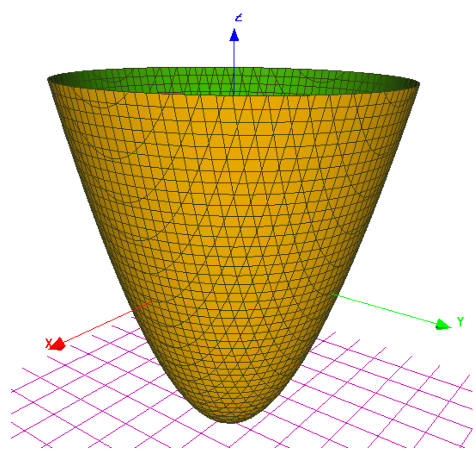
Principe de la preuve : établir que la fonction ψ admet un minimum, puis que ce minimum est nul.

Remarque. Si vous voulez vous faire une image de ψ, il faut un peu d'imagination. Puisqu'elle est définie sur $\mathbb{C}$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$, ψ ne sera plus représentée par une courbe, mais par une surface. Explicitement, l'image d'un complexe $z = x + \mathrm{i}\, y$ par ψ est le réel positif $\psi(z)$; on se propose alors d'associer à ces données le point de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $(x, y, \psi(x + \mathrm{i}\, y))$. L'ensemble des points obtenus de cette façon en faisant varier x et y est une surface de $\mathbb{R}^3$, que l'on pourra alors appeler surface représentative de la fonction ψ (et que l'on notera S_ψ dans les exemples ci-dessous).

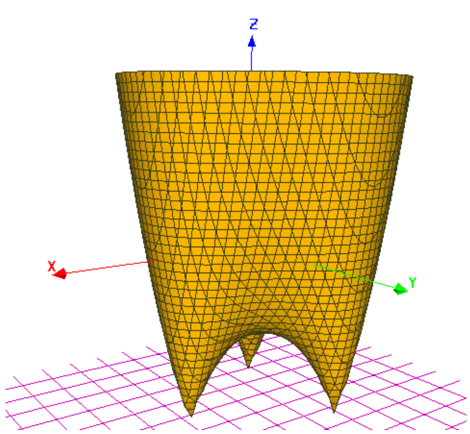
Ci-dessous, on donne quelques exemples de telles surfaces S_ψ associées à différents polynômes P.



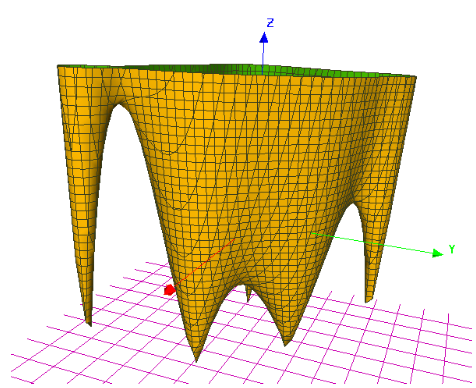
S_ψ pour $P = X$



S_ψ pour $P = X^2$



S_ψ pour $P = X^2 + X + 1$



S_ψ pour un certain P ayant 5 racines simples

La suite et la fin de la preuve sont en ligne sur le "cahier de prépa".

➤ 1ère partie — Où l'on prouve que ψ admet un minimum.

Pour tout nombre complexe z non nul, on a : $\psi(z) = |z^n| \left| a_n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{z^{n-k}} \right|$

Soit k un entier de $[\![0, n-1]\!]$. Lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$, on a : $\frac{a_k}{z^{n-k}} \longrightarrow 0$.

Donc : $\lim_{z \longrightarrow +\infty} \left| a_n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{z^{n-k}} \right| = |a_n|$

Puisque $|a_n| > 0$ (a_n est non nul par hypothèse [‡]), on a donc : $\lim_{z \longrightarrow +\infty} \psi(z) = +\infty$.

En particulier, il existe un réel $R > 0$ tel que : $\forall z \in \mathbb{C},\ (|z| > R) \Longrightarrow (\psi(z) > |a_0| + 1) \quad (\spadesuit)$. [§]

Posons alors $K = D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| \leqslant R\}$. K est une partie fermée et bornée de $\mathbb{C}$. [¶] D'après le théorème des bornes atteintes [‖], ψ admet un maximum et un minimum sur K.

Ne nous intéressons qu'au minimum de ψ, que l'on note m. Il existe un complexe $z_0 \in D(0, R)$ tel que : $\psi(z_0) = m$.

Alors : (1) : $\quad \forall z \in D(0, R), \quad \psi(z) \geqslant m$ puisque m est le minimum de ψ sur K.

En particulier : $|a_0| \geqslant m$ puisque $|a_0| = \psi(0)$. Il s'ensuit que : (2) $\quad \forall z \in \mathbb{C},\ (|z| > R) \Longrightarrow (\psi(z) > m)$ d'après ($\spadesuit$).

On déduit des points (1) et (2) que : $\boxed{\forall z \in \mathbb{C},\ \psi(z) \geqslant m = \psi(z_0) \quad (\clubsuit)}$.

Ainsi la fonction ψ admet un minimum (global) sur $\mathbb{C}$. Fin du premier acte.

➤ 2ème partie — Où l'on prouve que le minimum de ψ est nul.

Commençons par une observation pas trop difficile ; la fonction ψ étant à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, son minimum est supérieur ou égal à 0. Pour parvenir à nos fins, il "suffit" donc de prouver que m ne peut pas être strictement positif. Pour cela, rien de tel qu'un petit raisonnement par l'absurde.

Supposons que $m = \psi(z_0) > 0$. Alors la formule de Taylor appliquée en z_0 donne :

$$P(z_0 + Z) = \alpha_0 + \alpha_1 Z + \alpha_2 Z^2 + \cdots + \alpha_n Z^n$$

où les α_i désignent les complexes $\frac{P^{(i)}(z_0)}{i!}$. En particulier : $\alpha_0 = P(z_0) \neq 0$ (par hypothèse), et $\alpha_n \neq 0$ puisque $\deg(P) = n$.

Notons alors : $k = \min\{i \in [\![1, n]\!] \ / \ \alpha_i \neq 0\}$. L'existence de ce minimum est assurée par le fait que l'ensemble considéré est une partie de $\mathbb{N}^*$ (donc minorée !) non vide (n y appartient). Avec cette définition de k, on a donc :

$$P(z_0 + Z) = \alpha_0 + \alpha_k Z^k + \alpha_{k+1} Z^{k+1} + \cdots + \alpha_n Z^n$$

Notons encore ω une racine k-ième du complexe $-\frac{\alpha_0}{\alpha_k}$.

Alors pour tout réel t : $P(z_0 + \omega t) = \alpha_0 + \alpha_k w^k t^k + \alpha_{k+1} w^{k+1} t^{k+1} + \cdots + \alpha_n w^n t^n$

d'où : $P(z_0 + \omega t) = \alpha_0 - \alpha_0 t^k + \alpha_{k+1} w^{k+1} t^{k+1} + \cdots + \alpha_n w^n t^n$ soit enfin : $P(z_0 + \omega t) = \alpha_0 (1 - t^k + o(t^k))$.

D'où : $\psi(z_0 + \omega t) = |\alpha_0| \times \left|(1 - t^k + o(t^k))\right|$.

Pour $t > 0$, la quantité $1 - t^k + o(t^k)$ est strictement plus petite que 1 (puisqu'alors l'expression $t^k - o(t^k)$ est strictement positive) sur un voisinage de 0. En particulier, il existe un réel t_0 tel que : $\psi(z_0 + \omega t_0) < |\alpha_0|$.

En posant $z_1 = z_0 + \omega t_0$ et en se rappelant que $\alpha_0 = P(z_0) = m$, on a donc établi que :

$$\exists z_1 \in \mathbb{C},\ \psi(z_1) < \psi(z_0)$$

‡. C'est le coefficient dominant de P.

§. On utilise la définition de "tendre vers $+\infty$" pour une fonction définie sur $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, que voici : *soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$; $\lim_{z \to +\infty} f(z) = +\infty$ si pour tout réel M, il existe un réel R tel que : $\forall z \in \mathbb{C},\ (|z| > R) \Longrightarrow (f(z) > R)$.*
La motivation pour choisir $R = |a_0| + 1$ dans le cas présent est que $\psi(0) = |a_0|$, et que l'on est donc assuré qu'il existera un voisinage de 0 sur lequel ψ sera inférieure ou égale à $|a_0| + 1$, et donc que $R \neq 0$.

¶. Que K soit bornée, vous pouvez le comprendre. "Fermée", vous pouvez en avoir l'intuition : K est un disque fermé car "on en prend le bord". Vous verrez l'an prochain une définition vraiment mathématique de ce terme.

‖. Qui affirmera que toute fonction continue $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur une partie fermée et bornée de $\mathbb{C}$ est elle même bornée et atteint ses bornes. Ici, la fonction ψ est continue en tant que composée d'une fonction polynomiale, et de la fonction valeur absolue, toutes deux continues.

ce qui contredit violemment le fait que $\psi\,(z_0)$ est le minimum global de ψ.

Il s'ensuit que $m = \psi(z_0) = 0$, ce qui prouve que ψ s'annule au moins une fois dans $\mathbb{C}$, et donc que P s'annule au moins une fois dans $\mathbb{C}$.

Conclusion. Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède une racine dans $\mathbb{C}$.