MPSI – Colle 21 (27 au 31 mars 2023) : Polynômes

A l'attention des colleurs : merci de poser en début de colle une question sur un DL "fondamental" (au dos de ce programme), eg : "$DL_4(0)$ de cos ?".

Chapitre 19 : Polynômes

1 – Généralités

2 – Degré, coefficient dominant

~~(3 – Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$)~~

Aucune question spécifique à ce thème n'est attendue dans cette colle : pas de calcul de PGCD, de PPCM, de coefficients de Bezout. On pourra en revanche demander de prouver que D divise P en utilisant le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$, ou en utilisant les racines (multiples ou pas).

4 – Fonctions polynomiales

a – Racines d'un polynôme

b – Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$

c – Multiplicités / Dérivées successives

d – Polynômes irréductibles

Questions de cours

- **Lemme** : pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, le reste dans la division euclidienne du polynôme P par le polynôme $(X-\alpha)$ est le polynôme constant $\widetilde{P}(\alpha)$.

  ET Conséquence : α est racine de P SSI $(X-\alpha)$ divise P.

- **Exercice (polynômes interpolateurs de Lagrange 1)**. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(-1)=x$, $P(0)=y$ et $P(1)=z$.

- **Théorème** : soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}$. Le scalaire α est racine de P de multiplicité au moins m SSI $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$.

- **Exercice Tchebychev 1** : degré du n-ème polynôme de Tchebychev.

- **Exercice Tchebychev 2** : $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

Sur le principe du volontariat

- **Théorème (nombre maximal de racines d'un polynôme)** : si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ admet $(n+1)$ racines distinctes, alors $P = \tilde{0}$

  ET Corollaire (principe du prolongement algébrique) : soient P et Q dans $\mathbb{K}_n[X]$. S'il existe $(n+1)$ scalaires (càd des éléments de $\mathbb{K}$) $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ distincts tels que : $\forall\ i \in [\![1,\ n+1]\!]$, $P(\alpha_i) = Q(\alpha_i)$, alors $P = Q$.

- **Exercice (polynômes interpolateurs de Lagrange 2)**. Le polynôme $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \beta_i L_i$ est l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(\alpha_k) = \beta_k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, avec $L_i = \displaystyle\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{X-\alpha_j}{\alpha_i - \alpha_j}$

- **Formule de Taylor dans $\mathbb{K}[X]$ (en α)** : soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul, et soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors : $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$

- **Exercice Tchebychev 3** : racines/décomposition en irréductibles du n-ème polynôme de Tchebychev.

- **Théorème** : dans $\mathbb{K}[X]$, les polynômes de degré 1 sont irréductibles.

- **Théorème** : dans $\mathbb{C}[X]$, les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1.

- **"Demi-Théorème" (une seule implication)** : dans $\mathbb{R}[X]$, si un polynôme est irréductible, alors il est de degré 1, ou de degré 2 sans racine réelle.

"LES FONDAMENTAUX"

✏ $$e^x = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right] + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

✏ $$\operatorname{ch}(x) = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right] + o(x^{2n+1})$$
$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

✏ $$\operatorname{sh}(x) = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right] + o(x^{2n+2})$$
$$= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

✏ $$\cos(x) = \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right] + o(x^{2n+1})$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

✏ $$\sin(x) = \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right] + o(x^{2n+2})$$
$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

✏ $$\frac{1}{1-x} = \left[\sum_{k=0}^{n} x^k\right] + o(x^n) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

✏ $$\ln(1+x) = \left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}\right] + o(x^n)$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

✏ $$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$