

CHAPITRE 20 — “L’ESSENTIEL” SUR LES ESPACES VECTORIELS ET LES APPLICATIONS LINÉAIRES

PRÉAMBULE. Le but de ces notes est de présenter les acteurs principaux d’un nouveau domaine des Mathématiques, celui de l’Algèbre Linéaire. Les applications de ce domaine sont nombreuses, parfois inattendues, ... mais nécessitent un peu de patience et d’entraînement : il faut un peu de temps pour se familiariser avec les outils spécifiques de l’Algèbre Linéaire, et pour savoir les utiliser judicieusement.

TABLE DES MATIÈRES

1. Espaces vectoriels	2
2. Sous-espaces vectoriels	4
3. Combinaisons linéaires finies, familles génératrices	5
4. Applications linéaires	6
5. Ker et Im - Noyau et image d’une application linéaire	8
6. Isomorphismes et automorphismes	9
7. Sommes de sev et sev supplémentaires	9
7.1. Sommes de sev	9
7.2. Sev supplémentaires	10
7.3. Projections et symétries	11
8. Projecteurs	12

Tout au long de ce chapitre, on note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. ESPACES VECTORIELS

On commence par une définition très formelle.

DÉFINITION 1 - Un $\mathbb{K}$ -**espace vectoriel** $(E, +, \cdot)$ est un ensemble E muni d'une loi de composition interne (notée "+"), et d'une loi externe

$$\begin{aligned}\mathbb{K} \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, \vec{v}) &\longmapsto \lambda \cdot \vec{v}\end{aligned}$$

satisfaisant les conditions suivantes :

1/ $(E, +)$ est un groupe abélien ; le neutre est noté $\vec{0}_E$ et appelé **vecteur nul**.

2/ $\forall \vec{v} \in E, 1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

3/ $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall \vec{v} \in E, \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{v}$

4/ $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall \vec{v} \in E, (\lambda + \mu) \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{v}$

5/ $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (\vec{v}, \vec{w}) \in E^2, \lambda \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \lambda \cdot \vec{v} + \lambda \cdot \vec{w}$

A ce point du cours, deux options se présentent : soit vous avez compris en profondeur le sens de la définition précédente, c'est parfait et je vous félicite. Soit vous n'avez vu dans cette définition qu'une liste un peu indigeste d'axiomes sans véritable signification, auquel cas je vous invite à avoir en tête la définition moins précise mais plus explicite donnée ci-dessous :

Définition d'espace vectoriel (bis) : un $\mathbb{K}$ -**espace vectoriel** (ou $\mathbb{K}$ -ev) est un ensemble muni d'une "**addition**" ("loi +") et d'une "**multiplication par un scalaire**" ("loi ."), qui vérifient les propriétés que vous leur connaissez dans le cadre des vecteurs du plan (ou de l'espace).

Notation : on note $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -ev lorsque l'on veut insister sur le fait que E est muni d'une loi "+" et d'une loi ".". En pratique cependant, lorsque les lois sont l'addition et la multiplication par un scalaire usuelles, on notera simplement E un espace vectoriel.

La première motivation pour introduire ce nouveau concept est que presque tous les ensembles ayant servi de cadre aux précédents chapitres sont naturellement des espaces vectoriels.

Explicitement, on dispose d'une très impressionnante série de

“THÉORÈMES GÉNÉRAUX” SUR LES ESPACES VECTORIELS

THÉORÈME 1 - $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel (l'espace vectoriel des vecteurs usuels du plan).

THÉORÈME 2 - $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel (l'espace vectoriel des vecteurs usuels de l'espace usuel).

Et plus généralement :

THÉORÈME 3 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (l'espace vectoriel des n -uplets d'éléments de $\mathbb{K}$).

THÉORÈME 4 - $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel (l'espace vectoriel des suites réelles).

Pour le même prix :

THÉORÈME 5 - $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, et $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (les espaces vectoriels des suites complexes et à valeurs dans $\mathbb{K}$ respectivement).

THÉORÈME 6 - $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$).

THÉORÈME 7 - $(\mathbb{K}^I, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (l'espace vectoriel des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$; avec I un intervalle de $\mathbb{R}$).

THÉORÈME 8 - Pour tout entier naturel n , $(\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$).

THÉORÈME 9 - $(M_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$).

Pour finir ces généralités sur les ev :

DÉFINITION 2 - Un **vecteur** est un élément d'un espace vectoriel.

Dans le sens où ce sont des éléments d'espaces vectoriels, on peut ainsi affirmer que la matrice I_3 , la suite de Fibonacci, le 23ème polynôme de Tchebychev et encore la fonction sinus sont des vecteurs (OK, cela ne fait sans doute rire que l'auteur de ces lignes).

2. SOUS-ESPACES VECTORIELS

DÉFINITION 3 - Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E si les trois assertions suivantes sont vérifiées :

- (SEV1) $F \subset E$ (*inclusion*)
- (SEV2) $\vec{0}_E \in F$ (F “*passse par l’origine*”)
- (SEV3) $\forall (\vec{v}, \vec{w}) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w} \in F$ (*stabilité par combinaison linéaire*)

EXEMPLES DE SOUS-ESPACES VECTORIELS

Exemple 1 : pour tout espace vectoriel E , E est un sev de E ; à l’opposé, $\{\vec{0}_E\}$ est un sev de E .

Exemple 2 : $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un sev $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un sev de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; et $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un sev de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (donc de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ donc de ...).

En revanche, l’ensemble des bijections continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ n’est pas un sev de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (pourquoi ?).

Exemple 3 : si $\vec{v}$ est un vecteur non nul d’un $\mathbb{K}$ -ev E , alors $\mathbb{K}\vec{v} = \{\lambda \cdot \vec{v} / \lambda \in \mathbb{K}\}$ est un sev de E appelé **droite vectorielle** engendrée par $\vec{v}$.

Exemple 4 : l’ensemble des solutions de l’E.D. $(1+x^2)y' + 2xy = 0$ est un sev de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; explicitement, c’est la droite vectorielle engendrée par la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto (1+x^2)^{-1}$. Mais l’ensemble des solutions de l’E.D. $(1+x^2)y' + 2xy = 1$ n’est pas un sev de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (pourquoi ?).

Exemple 5 : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sev de $\mathbb{K}[X]$; mais l’ensemble des polynômes de degré égal à n n’est pas un sev de $\mathbb{K}[X]$ (pourquoi ?).

Exemple 6 : l’ensemble des matrices symétriques est un sev de $M_n(\mathbb{K})$; l’ensemble $GL_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles n’est pas un sev de $M_n(\mathbb{K})$ (pourquoi ?).

Exemple 7 : l’ensemble des suites réelles convergentes est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; l’ensemble des suites réelles croissantes n’est pas un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (pourquoi ?).

PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DES SOUS-ESPACES VECTORIELS

Remarque 1 : soit E un $\mathbb{K}$ -ev. Alors $\{\vec{0}_E\}$ et E sont des sev de E .

Remarque 2 : puisque par définition un sev contient toujours au moins le vecteur nul $\vec{0}_E$, un sev n’est jamais vide.

PROPRIÉTÉ 1 - Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels d’un même $\mathbb{K}$ -ev E .

Alors $F_1 \cap F_2$ est un sev de E .

Exemples : dans $\mathbb{R}^2$, l'intersection des droites vectorielles $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ (ie d'équations respectives $y = x$ et $3x + 2y = 0$) est le singleton $\{\vec{0}_{\mathbb{R}^2}\}$. Dans $\mathbb{R}^3$, l'intersection des plans d'équations respectives $x = 0$ et $y - z = 0$ est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dans $M_2(\mathbb{C})$, l'intersection du sev des matrices symétriques et du sev des matrices triangulaires supérieures est le sev des matrices diagonales ; et l'intersection du sev des matrices symétriques et du sev des matrices antisymétriques est réduit à la matrice nulle.

Remarque. Il résulte de la propriété précédente et de la remarque faite juste avant son énoncé que **l'intersection de deux sous-espaces vectoriels n'est à son tour JAMAIS vide** puisqu'elle contient au moins le vecteur nul.

Remarque. En général, l'union de deux sev n'est pas un sev. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$ l'union des droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$ n'est pas un sev (cette union n'étant pas stable pour l'addition). Même conclusion dans $\mathbb{R}^3$ pour l'union des plans d'équations $x + y = 0$ et $2x - y + 3z = 0$. D'ailleurs :

PROPRIÉTÉ 2 - Soient E un $\mathbb{K}$ -ev, F_1 et F_2 deux sev de E .

Alors $(F_1 \cup F_2)$ est un sev de E si et seulement si $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$.

3. COMBINAISONS LINÉAIRES FINIES, FAMILLES GÉNÉRATRICES

DÉFINITION 4 - Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et soit $\mathcal{F} = (\vec{v}_i)_{i \in [1, n]}$ une famille finie de vecteurs de E .

On note $\text{Vect}(\mathcal{F})$ **l'ensemble des combinaisons linéaires** de vecteurs de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs de E s'écrivant : $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i$, avec $(\alpha_i)_{i \in [1, n]} \in \mathbb{K}^n$.

PROPRIÉTÉ 3 - Avec les notations précédentes : $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de E .

MÉTHODE — La propriété précédente fournit une nouvelle méthode pour prouver qu'une partie F d'un ev E est un sous-espace vectoriel. Il "suffit" en effet de montrer que tout élément de F est combinaison linéaire d'éléments de E que l'on détermine par le calcul ; voir exemples un peu plus bas.

DÉFINITION 5 - Soit F un sev de E . On appelle **famille génératrice** de F une famille $(\vec{v}_i)_{i \in [1, n]}$ de vecteurs de E telle que :

$$F = \text{Vect} \left((\vec{v}_i)_{i \in [1, n]} \right)$$

Exemple 1 : on a $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}((1, 0); (0, 1))$.

Exemple 2 : dans l'espace vectoriel $M_2(\mathbb{R})$, le sev $S_2(\mathbb{R})$ des matrices symétriques peut s'écrire :

$$\text{Vect}(E_{11}, E_{22}, E_{12} + E_{21})$$

Et le sev $A_2(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques s'écrit : $\text{Vect}(E_{12} - E_{21})$; il s'agit donc d'une droite vectorielle dans l'espace des matrices carrées de taille 2.

Exemple 3 : notons F la partie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constituée des suites $(x_n)_n$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = x_{n+1} + x_n. \text{ On a : } F = \text{Vect} \left(\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)_n, \left(\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)_n \right).$$

F est en particulier un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Attention : il n'y a pas unicité de la famille génératrice d'un sev. Autrement dit, deux familles distinctes de vecteurs peuvent engendrer le même sev. Explicitement :

Exemple 4 : on a $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}(1, X, X^2)$ (par définition de polynôme), $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}(1, (X - \alpha), (X - \alpha)^2)$ (formule de Taylor pour les polynômes), $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}(L_{-1}, L_0, L_1)$ (où les L_i désignent les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux scalaires $-1, 0$ et 1).

Plus généralement :

PROPRIÉTÉ 4 - Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $\mathcal{F} = (\vec{v}_i)_{i \in [1, n]}$ et $\mathcal{F}' = (\vec{w}_j)_{j \in [1, p]}$ deux familles de vecteurs de E . On a :

$$\text{Vect}((\vec{v}_i)_{i \in [1, n]}) = \text{Vect}((\vec{w}_j)_{j \in [1, p]}) \text{ SSI}$$

$$\forall i \in [1, n], v_i \in \text{Vect}(\mathcal{F}') \text{ et } \forall j \in [1, p], w_j \in \text{Vect}(\mathcal{F})$$

4. APPLICATIONS LINÉAIRES

DÉFINITION 6 - Une application $f : E \longrightarrow F$ entre deux $\mathbb{K}$ -ev est **linéaire** si :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$$

Un **endomorphisme** de E est une application linéaire de E dans lui-même (" $F = E$ ").

Remarque : trois propriétés peuvent être obtenues comme conséquences immédiates de la définition. Si $f : E \longrightarrow F$ est linéaire, alors :

$$\blacktriangleright \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \quad (\text{"l'image d'une somme est la somme des images"})$$

$$\blacktriangleright \forall (\lambda, \vec{v}) \in \mathbb{K} \times E, f(\lambda \vec{v}) = \lambda f(\vec{v}) \quad (\text{"f est compatible avec la loi externe"})$$

$$\blacktriangleright f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F \quad (\text{"f envoie le vecteur nul sur le vecteur nul"})$$

Notations : $\mathcal{L}(E, F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E dans F , $\mathcal{L}(E)$ celui des endomorphismes de E .

EXEMPLES D'APPLICATIONS LINÉAIRES

Exemple 1. L'application

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x + y, 0)\end{aligned}$$

est linéaire.

Exemple 2. L'application

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u_n) &\longmapsto (u_0, u_1)\end{aligned}$$

est linéaire.

Exemple 3. L'application

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{K}_{n-1}[X] \\ P &\longmapsto P'\end{aligned}$$

est linéaire.

Exemple 4. L'application

$$\begin{aligned}\mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longmapsto \int_0^\pi P(t) \sin(t) dt\end{aligned}$$

est linéaire.

Exemple 5. L'application

$$\begin{aligned}M_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{K}) \\ A &\longmapsto {}^t A\end{aligned}$$

est linéaire.

Exemple 6. L'application

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\ f &\longmapsto f' - 2f\end{aligned}$$

est linéaire.

Exemple 7. L'application

$$\begin{aligned}M_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ A &\longmapsto \text{tr}(A)\end{aligned}$$

est linéaire.

PROPRIÉTÉ 5 - La somme de deux applications linéaires est linéaire ; plus généralement une combinaison linéaire d'applications linéaires est linéaire ; la composée de deux applications linéaires est linéaire. Plus précisément :

$$1/ \forall (f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2, (f + g) \in \mathcal{L}(E, F)$$

$$2/ \forall (f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, (\lambda f + \mu g) \in \mathcal{L}(E, F)$$

$$3/ \forall (f, g) \in \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G), g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$$

5. KER ET IM - NOYAU ET IMAGE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

DÉFINITION 7 - Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **noyau de f** et on note $\ker f$ le sous-ensemble de E suivant :

$$\ker f = \left\{ \vec{v} \in E \mid f(\vec{v}) = \vec{0}_F \right\}$$

On appelle **image de f** et on note $\text{Im } f$ le sous-ensemble de F suivant :

$$\text{Im } f = \{ \vec{w} \in F \mid \exists \vec{v} \in E, f(\vec{v}) = \vec{w} \}$$

Exemple. L'application qui à un polynôme P associe son polynôme dérivé induit un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$, dont le noyau est le sev des polynômes constants, et l'image est le sev des polynômes de degré au plus 1.

PROPRIÉTÉ 6 - Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\ker f$ est un sev de E et $\text{Im } f$ est un sev de F .

Remarques pratiques. Déterminer le noyau d'une application linéaire revient à résoudre une équation (" $f(\vec{v}) = 0$ "). Il faut alors avoir présent à l'esprit que suivant l'espace vectoriel dans lequel on travaille, cette équation peut être une équation polynomiale, une équation différentielle, un système linéaire, une équation matricielle...

Déterminer l'image d'une application linéaire peut s'avérer une opération plus délicate. Dans le cas où l'on dispose d'une famille génératrice de l'espace de départ (par exemple si $E = \mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{K}_n[X]$ ou $M_n(\mathbb{K})$), la propriété ci-dessous donne une méthode pratique pour y parvenir.

PROPRIÉTÉ 7 - Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On suppose qu'il existe une famille $(\vec{v}_i)_{i \in [1, n]}$ génératrice de E , c'est à dire une famille de vecteurs de E tels que $E = \text{Vect}((\vec{v}_i)_{i \in [1, n]})$. Alors :

$$\text{Im } f = \text{Vect}((f(\vec{v}_i))_{i \in [1, n]})$$

Exemple 1. Considérons l'application linéaire $f : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$.

$$A \longmapsto \text{tr}(A)$$

Le noyau de f est le sev de $M_n(\mathbb{K})$ constitué des matrices de trace nulle.

Son image est : $\text{Im } f = \text{Vect}((f(E_{ij}))_{(i,j) \in [1, n]^2})$.

En particulier : $\text{Vect}(f(E_{11})) \text{Im } f \subset \mathbb{K}$. D'où : $\text{Vect}(1) \subset \text{Im } f \subset \mathbb{K}$.

Or : $\text{Vect}(1) = \mathbb{K}$. On en déduit donc que $\text{Im } f = \mathbb{K}$, càd que f est surjective.

Nous aurons l'occasion de revenir en détails sur ce type de situation lorsque nous étudierons les *formes linéaires*.

Exemple 2. Considérons l'application linéaire $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$.

$$P \longmapsto P - XP'$$

Le noyau de f est le sev des solutions dans $\mathbb{R}_2[X]$ de l'équation polynomiale $P - XP' = 0$. On peut obtenir facilement que : $\ker f = \text{Vect}(X)$.

Son image est : $\text{Im} f = \text{Vect}(f(1), f(X), f(X^2))$.

Or : $f(1) = 1$, $f(X) = 0$ et $f(X^2) = -X^2$. On en déduit que : $\text{Im} f = \text{Vect}(1, 0, -X^2)$, càd que : $\text{Im} f = \text{Vect}(1, X^2)$.¹

Remarque “pour l’avenir”. Dans l’exemple ci-dessus, le noyau de f pourra être appelé *droite vectorielle* engendrée par X , et l’image de f *plan vectoriel* engendré par 1 et X^2 .

6. ISOMORPHISMES ET AUTOMORPHISMES

DÉFINITION 8 - Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev. On appelle **isomorphisme** entre E et F (*resp.* **automorphisme** de E) une application linéaire $f : E \rightarrow F$ bijective (*resp.* un endomorphisme de E bijectif).

Les ev E et F sont **isomorphes** s’il existe un isomorphisme entre E et F .

Exemples : l’application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ associe le triplet de ses coefficients est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ (les ev $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^3$ sont donc isomorphes). L’application qui à toute matrice carrée de $M_n(\mathbb{K})$ associe sa transposée induit un automorphisme de $M_n(\mathbb{K})$. Voir cours (passé et à venir d’ici la fin de l’année) pour d’autres exemples.

Notation : $\text{GL}(E)$ est l’ensemble des automorphismes de E .

PROPRIÉTÉ 8 - La composée de deux iso(auto)morphismes est un iso(auto)morphisme.

Si f est un isomorphisme entre E et F , alors f^{-1} est un isomorphisme entre F et E .

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ sont deux isomorphismes, alors $g \circ f$ est un isomorphisme de E dans G , et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

COROLLAIRE 1 - $(\text{GL}(E), \circ)$ est un groupe, appelé **groupe linéaire de E** .

7. SOMMES DE SEV ET SEV SUPPLÉMENTAIRES

7.1. Sommes de sev.

DÉFINITION 9 - Soient F et G deux sev d’un même $\mathbb{K}$ -ev E . La **somme de F et G** , notée $F + G$ est l’ensemble des vecteurs de E s’écrivant comme somme d’un vecteur de F et d’un vecteur de G , soit :

$$F + G = \left\{ \vec{v} \in E \mid \exists (\vec{f}, \vec{g}) \in F \times G, \vec{v} = \vec{f} + \vec{g} \right\}$$

PROPRIÉTÉ 9 - Avec les notations précédentes, $F + G$ est un sev de E .

PROPRIÉTÉ 10 - Soient $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_p$ ($n + p$) vecteurs de E . On a :

$$\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) + \text{Vect}(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_p) = \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_p)$$

1. En vertu de la formule de Taylor appliquée dans $\mathbb{R}_2[X]$ en 0, il s’agit donc du sev de $\mathbb{R}_2[X]$ constitué des polynômes P tels que $P'(0) = 0$.

Remarque. La définition de somme de sev peut-être généralisée à une somme à n termes.

DÉFINITION 10 - Soient p un entier naturel supérieur ou égal à 2, et $F_1, \dots, F_p$ p sev d'un même $\mathbb{K}$ -ev E .

La **somme** $F_1 + \dots + F_p$ est l'ensemble :

$$F_1 + \dots + F_p = \left\{ \vec{v} \in E \mid \exists (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p) \in F_1 \times \dots \times F_p, \vec{v} = \sum_{i=1}^p \vec{f}_i \right\}$$

Exemples. $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}(1) + \text{Vect}(X) + \text{Vect}(X^2)$; $M_n(\mathbb{K}) = T_n^+(\mathbb{K}) + T_n^-(\mathbb{K}) + D_n(\mathbb{K}) \dots$

PROPRIÉTÉ 11 - Avec les notations de la définition 10, $F_1 + \dots + F_p$ est un sev de E .

7.2. Sev supplémentaires.

DÉFINITION 11 - Deux sev F et G d'un même $\mathbb{K}$ -ev E sont dits **supplémentaires (dans E)** lorsque tout vecteur de E s'écrit de manière unique (à l'ordre près) comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G , c'est à dire :

$$\forall \vec{v} \in E, \quad \exists! (\vec{f}, \vec{g}) \in F \times G, \quad \vec{v} = \vec{f} + \vec{g}$$

Dans ce cas, on note : $E = F \oplus G$, et on dit que E est la **somme directe** de F et de G .

Exemples. Avec les notations usuelles pour les vecteurs que vous connaissez bien, on a :

$$\mathbb{R}^2 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \oplus \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad \mathbb{R}^3 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \oplus \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Dans un autre registre, on a encore : $\mathbb{R}_3[X] = \text{Vect}(X, X^2, X^3) \oplus \text{Vect}(1), \dots$

En revanche $F = \text{Vect}(X, X^2)$ et $G = \text{Vect}(X^3)$ ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$ (car $F+G \subsetneq E$); et $F' = \text{Vect}(1, X, X^2)$ et $G' = \text{Vect}(X^2, X^3)$ ne sont pas supplémentaires non plus dans $\mathbb{R}_3[X]$ ("pas d'unicité de la décomposition").

Autres exemples (les "inratables"). Dans $M_n(\mathbb{K})$, les sev des matrices symétriques $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires (toute matrice carrée s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une antisymétrique). On a donc : $M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$.

Enfin si I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0, l'espace vectoriel $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ est la somme directe des sev $\mathcal{P}(I, \mathbb{K})$ et $\mathcal{I}(I, \mathbb{K})$ des fonctions paires et impaires respectivement : $\mathcal{F}(I, \mathbb{K}) = \mathcal{P}(I, \mathbb{K}) \oplus \mathcal{I}(I, \mathbb{K})$ (toute fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire).

PROPRIÉTÉ 12 - (Caractérisation des sev supplémentaires). Soient F et G deux sev d'un même $\mathbb{K}$ -ev E . Alors :

$$[F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E] \iff [F \cap G = \{\vec{0}\} \text{ et } E = F + G]$$

Remarque informelle. “ $E = F + G$ donne l'existence de la décomposition, et la condition $F \cap G = \{\vec{0}\}$ entraîne l'unicité”.

Application. Soit $E = \mathcal{C}([0; \pi], \mathbb{R})$. On considère les deux sev de E suivants :

$$F = \left\{ f \in E / f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \right\} \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}(\cos, \sin).$$

Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .

7.3. Projections et symétries.

DÉFINITION 12 - Soient E un $\mathbb{K}$ -ev E ; F et G deux sev supplémentaires de E (càd tels que $E = F \oplus G$), de telle sorte que :

$$\forall \vec{v} \in E, \quad \exists! (\vec{f}, \vec{g}) \in F \times G, \quad \vec{v} = \vec{f} + \vec{g}$$

Ces hypothèses et notations étant posées, on appelle :

- **projection sur F parallèlement à G** l'application p_F de E dans E définie par $p_F(\vec{v}) = \vec{f}$;
- **symétrie par rapport à F parallèlement à G** l'application s_F de E dans E définie par $s_F(\vec{v}) = \vec{f} - \vec{g}$

Exemple naïf. L'application $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie en posant $p(x, y) = (x, 0)$ est la projection sur $\text{Vect}((1, 0))$ parallèlement à $\text{Vect}((0, 1))$.

L'application $s : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie en posant $p(x, y) = (x, -y)$ est la symétrie par rapport à $\text{Vect}((1, 0))$ parallèlement à $\text{Vect}((0, 1))$.

PROPRIÉTÉ 13 - (Propriétés des projections et symétries). Avec les hypothèses et notations de la définition précédente :

1/ p_F est un endomorphisme de E , et $p_F^2 = p_F$. En outre : $\ker(p_F) = G$ et $\text{Im}(p_F) = F$.

2/ s_F est un endomorphisme de E , et $s_F^2 = \text{id}_E$ (s_F est une involution). En particulier, s_F est un automorphisme de E ($s_F \in \text{GL}(E)$).

Remarque. Avec les notations et hypothèses de la propriété précédente, on a :

$$\vec{v} \in \text{Im}(p_F) \iff \vec{v} \in F \iff p_F(\vec{v}) = \vec{v} \iff \vec{v} \in \ker(\text{id}_E - p_F)$$

D'où : $F = \text{Im}(p_F) = \ker(\text{id}_E - p_F)$.

Exemples “fun”. La fonction cosinus hyperbolique est l'image de la fonction exponentielle par la projection sur le sev des fonctions paires parallèlement au sev des fonctions impaires. Et pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, la transposée de A est l'image de A par la symétrie par rapport au sev des matrices symétriques parallèlement au sev des matrices antisymétriques.

8. PROJECTEURS

DÉFINITION 13 - Soit E un $\mathbb{K}$ -ev. Un **projecteur** de E est un endomorphisme p de E tel que $p^2 = p$.

Par exemple, une projection (au sens défini dans le paragraphe précédent) est un cas particulier de projecteur. L'objet de ce paragraphe est de prouver qu'il n'y a pas d'autre situation, c'est-à-dire que tout projecteur est une projection ; ceci se fait en trois étapes.

LEMME 1 - (Propriétés des projecteurs). Soit $p \in \mathcal{L}(E)$.

Si p est un projecteur, alors :

1/ $\text{id}_E - p$ est un projecteur

2/ $\text{Im}(p) = \ker(\text{id}_E - p)$

3/ $\ker(p) = \text{Im}(\text{id}_E - p)$

Remarque. Pour donner un peu de sens aux propriétés ci-dessus, on pourra observer que dans la situation du paragraphe précédent (où $E = F \oplus G$), la projection p_F est un projecteur, et $\text{id}_E - p_F = p_G$ (qui est effectivement un autre projecteur). En continuant de considérer $p = p_F$, on a alors $\text{Im}(p) = F = \ker(p_G)$; et $\ker(p) = G = \text{Im}(p_G)$.

PROPRIÉTÉ 14 - (Caractérisation des projecteurs). Soit $p \in \mathcal{L}(E)$.

LASSE :

1/ p est un projecteur

2/ $\text{id}_E - p$ est un projecteur

3/ $E = \ker(p) \oplus \ker(\text{id}_E - p)$

THÉORÈME 10 - Soient E un $\mathbb{K}$ -ev, et $p \in \mathcal{L}(E)$.

Si p est un projecteur de E , alors p est la projection sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.