Exercices 20 — Espaces vectoriels et applications linéaires

Stabilité par somme, et par multiplication par un scalaire

Préambule. Soit F une partie de $\mathbb{K}[X]$.

On introduit deux définitions :

➤ La partie F est dite **stable par somme** si la somme de deux éléments quelconques de F est encore dans F, càd :

$$\forall (P, Q) \in F^2, \ (P + Q) \in F$$

➤ La partie F est dite **stable par multiplication par un scalaire** si :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \forall P \in F, \ (\lambda P) \in F$$

Pour prouver qu'une partie est stable par somme, on... le démontre ! Et pour prouver qu'une partie n'est pas stable par somme, un contre-exemple suffit.

Deux illustrations.

a/ On considère $F = \{P \in \mathbb{K}[X], \ P(1) = 0\}$. La partie F est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ qui s'annulent en 1.

Si P et Q appartiennent à F, alors :

$$(P+Q)(1) = P(1) + Q(1) \text{ d'où : } (P+Q)(1) = 0 \text{ puisque } P(1) = Q(1) = 0 \text{ par hypothèse.}$$

Donc $P + Q$ appartient à F. On a donc justifié que F **est stable par somme**.

b/ On considère $G = \{P \in \mathbb{K}[X], \ \deg(P) = 2\}$. La partie G est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ qui sont exactement de degré 2.

Considérons $P = X^2 + X$ et $Q = -X^2$.
Alors P et Q appartiennent à G, mais $P + Q = X$ n'y appartient pas.

Ce contre-exemple permet d'affirmer que G **n'est pas stable par somme**.

Exercice 1. — En vous inspirant de ces exemples, déterminer si chacune des parties suivantes est stable par somme, et par multiplication par un scalaire. [*]

1/ L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

2/ L'ensemble des polynômes de degré pair.

3/ L'ensemble des polynômes admettant 2 et 3 comme racines.

4/ Les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ représentant une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.

5/ L'ensemble des polynômes irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$.

6/ L'ensemble des polynômes admettant 1 comme racine de multiplicité au moins 4.

∗. 1 : oui et oui / 2 : non et non / 3 : oui et oui / 4 : oui et non / 5 : non et non / 6 : oui et oui

Exercice 2. — Dans chacun des cas suivants, F désigne une partie de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$: on demande de déterminer si F est stable par somme, et/ou stable par multiplication par un scalaire. †

1/ $F = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

2/ $F = \left\{ f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0 \right\}$ (F désigne ici l'ensemble des fonctions continues et positives sur $\mathbb{R}$).

3/ $F = \left\{ f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \right\}$ (F désigne ici l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, et d'intégrale nulle sur $[0,1]$).

4/ $F = \left\{ f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f'' - 3f' + 2f = 0 \right\}$ (F désigne ici l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, solutions de l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 0$).

Exercice 3. — Dans chacun des cas suivants, F désigne une partie de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$: on demande de déterminer si F est stable par somme, et/ou stable par multiplication par un scalaire.

1/ $F = \mathrm{T}_2^+(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$).

2/ $F = \mathrm{S}_2(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices symétriques de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$).

3/ $F = \{M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\ \mathrm{tr}(M) = 0\}$ (l'ensemble des matrices de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ ayant une trace nulle).

4/ $F = \{M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\ \det(M) = 0\}$ (l'ensemble des matrices de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ ayant un déterminant nul).

Exercice 4. — Dans chacun des cas suivants, F désigne une partie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: on demande de déterminer si F est stable par somme, et/ou stable par multiplication par un scalaire.

1/ F : la partie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constituée des suites croissantes.

2/ F : la partie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constituée des suites convergentes.

3/ F : la partie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constituée des suites convergentes et de limite égale à 1.

4/ F : la partie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constituée des suites périodiques de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. ‡

Sous-espaces vectoriels

Exercice 5. — **(Sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$)**
On pose $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$). Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

1/ $A = \{f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0\}$

2/ $B = \mathscr{C}^3(\mathbb{R},\mathbb{R})$

3/ $C = \{f \in E,\ f \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } f'(1) = 0\}$

4/ $D = \{f \in E, \displaystyle\int_{-1}^1 f(x)dx = 0\}$

Exercice 6. — **(Sous-espaces vectoriels du $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes $\mathbb{C}[X]$)**
Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}[X]$?

1/ L'ensemble A des polynômes de degré $\leqslant 3$.

2/ L'ensemble B des polynômes de degré exactement 3.

3/ L'ensemble C des polynômes unitaires. §

4/ L'ensemble D des polynômes P à coefficients imaginaires purs.

Exercice 7. — **(Sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$)** Montrer que :

$$F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y - t = 0 \right\} \text{ est un sev de } \mathbb{R}^3$$

Exercice 8. — **(Sous-espaces vectoriels).**(*) Montrer que l'ensemble des fonctions **à support borné** (*ie* nulles en-dehors d'un intervalle fermé borné) constitue un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 9. — **(Sous-espaces vectoriels).**(*) Soient F et G deux sev d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Montrer que $F \cap G$ est un sev de E.

---

†. Les définitions de "stable par…" sont analogues à celles introduites dans le cadre des polynômes.

‡. On dit qu'une suite réelle (u_n) est périodique s'il existe un entier naturel <u>non nul</u> N tel que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+N} = u_n$.

§. Un polynôme est dit unitaire lorsque son coefficient dominant vaut 1.

Exercice 10. — (Sous-espaces vectoriels).(*) Soient F et G deux sev d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Montrer que :

$$[F \cup G \text{ est un sev de } E] \iff [F \subset G \text{ ou } G \subset F]$$

Exercice 11. — (SEV). Dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, on considère la partie F contituée des matrices de déterminant nul. F est-il un sev de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 12. — (Commutant d'une matrice). Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

On note F le commutant de la matrice A, càd l'ensemble des matrices $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec A, soit encore :

$$F = \{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), \quad MA = AM\}$$

Montrer que F est un sev de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Familles génératrices

Exercice 13. — (Familles génératrices). Montrer que l'ensemble $F = \left\{(a+2b, b, a-b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, et en déterminer une famille génératrice.

Exercice 14. — (Familles génératrices). Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en déterminer une famille génératrice :

1/ $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$

2/ $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = 0\}$

3/ La partie F de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ constituées des solutions de l'équation différentielle : $y'' - 4y = 0$

4/ La partie F de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constituée des suites (u_n) telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_n$

5/ L'ensemble F des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

6/ L'ensemble F des matrices de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de trace nulle.

Exercice 15. — Dans $\mathbb{R}_3[X]$, on considère la partie F constituée des polynômes P tels que : $\displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\, \mathrm{d}t = 0$.

Montrer que F est un sev de $\mathbb{R}_3[X]$, et en déterminer une famille génératrice.

Exercice 16. — Déterminer une famille génératrice du sev de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions f telles que : $f'' = 2f' - 2f$.

Exercice 17. — Montrer que $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0 \quad \text{et} \quad 2x - y + 3z = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$, et en déterminer une famille génératrice.

Exercice 18. — Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev E. Montrer que :

$$\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

Exercice 19. — Dans $E = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, on considère la partie F constituée des matrices dont la somme des coefficients de la première ligne est nulle.

Montrer que F est un sev de E, et en déterminer une famille génératrice.

Exercice 20. — (Sev de $\mathbb{R}_4[X]$, famille génératrice). Dans $\mathbb{R}_4[X]$, on considère la partie :

$$F = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid 2 \text{ est racine de } P \text{ de multiplicité au moins } 3\}$$

Montrer que F est un sev de $\mathbb{R}_4[X]$, et en déterminer une famille génératrice.

Applications linéaires

Exercice 21. — (Applications linéaires) Les applications suivantes sont-elles $\mathbb{R}-$linéaires ?

1) $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,y,xy) \end{array}$

2) $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+2y \end{array}$

3) $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & (1+X^2)P'+XP \end{array}$

4) $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \end{array}$

Exercice 22. — (Application linéaire et commutant). Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

On considère l'application :

$$f : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$$
$$M \longmapsto MA - AM$$

1/ Montrer que l'application f est linéaire.

2/ En déduire que le commutant de A est un sev de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 23. — (Application linéaire). On considère l'application :

$$f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$$
$$P \longmapsto P - X^2P''$$

1/ Montrer que l'application f est linéaire.

2/ Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 24. — (Application linéaire). Dans cet exercice, on note $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et $\omega \in R_+^*$.

On considère l'application :

$$f : E \longrightarrow E$$
$$y \longmapsto y'' + \omega^2 y$$

1/ Montrer que l'application f est linéaire.

2/ Déterminer le noyau de f.

Exercice 25. — (Application linéaire). On considère l'application :

$$f : \mathrm{M}_2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{K})$$
$$M \longmapsto M - {}^tM$$

1/ Montrer que l'application f est linéaire.

2/ Déterminer le noyau de f.

3/ On note $\mathrm{A}_2(\mathbb{K})$ la partie de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$ constituée des matrices antisymétriques. Montrer que $\mathrm{A}_2(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}(A)$, où A est une matrice que l'on explicitera.

4/ Montrer que $\mathrm{im}\, f = \mathrm{A}_2(\mathbb{K})$.

Indication. On pourra exploiter le fait que $\mathrm{M}_2(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$, et utiliser la propriété du cours d'hier permettant de déterminer “pratiquement” l'image d'une application linéaire.

Exercice 26. — (Noyau d'une application linéaire et équation différentielle linéaire). On considère l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto f'' - 6f' + 9f \end{aligned}$$

1/ Montrer que l'application φ est linéaire.

2/ Déterminer le noyau de φ.

Exercice 27. — (Noyau d'une application linéaire et suite récurrente linéaire). On considère l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_n &\longmapsto (u_{n+2} + u_{n+1} + u_n)_n \end{aligned}$$

1/ Montrer que l'application φ est linéaire.

2/ Déterminer le noyau de φ.

Exercice 28. — (Noyau d'une application linéaire et équation polynomiale). On considère l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}_3[X] &\longrightarrow \mathbb{K}_3[X] \\ P &\longmapsto P - (X+1)P' \end{aligned}$$

1/ Montrer que l'application φ est linéaire.

2/ Déterminer le noyau et l'image de φ.

Exercice 29. — Soient E un $\mathbb{K}$-ev, et $(f,g) \in \mathscr{L}(E)^2$. On suppose que $f \circ g = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
Montrer que $\mathrm{Im}(g) \subset \ker(f)$.

Exercice 30. — (Les 3 méthodes). On dispose (pour l'instant) de trois méthodes pour établir qu'une partie F est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-ev E :

— **la méthode "(SEV1), (SEV2), (SEV3)"** ;

— **la méthode "Vect"** : on prouve que $F = \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$, avec $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E ;

— **la méthode "ker"** : on prouve que $F = \ker f$, où f est une certaine application linéaire.

On appelle M1, M2 et M3 ces trois méthodes permettant de prouver qu'une partie est un sev d'un ev donné. Dans chacune des questions suivantes, indiquer quelle(s) méthode(s) vous semble(nt) adaptée(s) pour parvenir au résultat ; puis traiter la question.

1/ Etablir que l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est un sev de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

2/ Etablir que l'ensemble des matrices antisymétriques est un sev de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

3/ Etablir que l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}_5[X]$ divisibles par X^3 est un sev de $\mathbb{K}_5[X]$, et en déterminer une famille génératrice.

4/ Etablir que l'ensemble des suites géométriques de raison 2 est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 31. — (Matrice d'une application linéaire). On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}^2 &\longrightarrow \mathbb{K}^2 \\ X &\longmapsto AX \end{aligned}$$

est un automorphisme de $\mathbb{K}^2$ (càd linéaire et bijective).

Exercice 32. — **(Matrice d'une application linéaire').** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
On considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ X &\longmapsto AX \end{aligned}$$

A quelle condition nécessaire et suffisante sur la matrice A l'application φ est-elle un automorphisme de $\mathbb{K}^n$?

Exercice 33. — **("Basique").** On considère l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x-y, y+z) \end{aligned}$$

On admet que f est linéaire.

1/ Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{im} f$.

2/ L'application f est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 34. — **(Conjugaison).** Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$). Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \\ A &\longmapsto P^{-1}AP \end{aligned}$$

est un automorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 35. — **(Isomorphisme).** On considère l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{K}^3 \\ P &\longmapsto (P(0), P(1), P'(0)) \end{aligned}$$

On admet que φ est linéaire. ¶

1/ Déterminer $\ker \varphi$. Que peut-on en déduire pour φ ?

2/ **Surjectivité de φ.**

a/ Justifier brièvement que : $\mathrm{im}\varphi = \mathrm{Vect}\left(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2)\right)$

b/ Montrer que la famille $\left\{\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2)\right\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^3$, c'est à dire que pour tout $\overrightarrow{v} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3$, il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que :

$$\alpha_1\varphi(1) + \alpha_2\varphi(X) + \alpha_3\varphi(X^2) = (x_1, x_2, x_3)$$

Indication : ceci revient à résoudre un système 3×3, ou à inverser une matrice si vous préférez.

c/ En déduire que φ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$ dans $\mathbb{K}^3$.

3/ **Surjectivité de φ, le retour.**

a/ Déterminer trois polynômes P_1, P_2, P_3 tels que :

— P_1, P_2, P_3 sont dans $\mathbb{K}_2[X]$

— $\varphi(P_1) = (1, 0, 0)$; $\varphi(P_2) = (0, 1, 0)$; $\varphi(P_3) = (0, 0, 1)$

b/ Justifier brièvement que $\mathrm{Vect}\left(\varphi(P_1), \varphi(P_2), \varphi(P_3)\right) \subset \mathrm{im}\varphi$.

c/ Conclure.

¶. Rien ne vous empêche de le prouver pour vous entraîner encore ; en tous les cas, on a déjà vu suffisamment d'exemples de ce type pour que cela ne vous pose aucun problème (ne pas hésiter à me le signaler si tel était néanmoins le cas ; en maths, tout est toujours très facile, après coup !. . .).

Exercice 36. — (Transport d'une famille génératrice, TRES IMPORTANT).

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, φ un isomorphisme de E dans F, et $\mathscr{F} = \{\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) une famille génératrice de E.

Montrer que $\varphi(\mathscr{F}) = \{\varphi(\overrightarrow{v_1}), \dots, \varphi(\overrightarrow{v_n})\}$ est une famille génératrice de F.‖

Exercice 37. — (Application linéaire). On considère l'application

$$f : \mathrm{M}_2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{K})$$
$$A \longmapsto A - \mathrm{tr}(A)\mathrm{I}_2$$

1/ Montrer que f est un endomorphisme de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$.

2/ Déterminer le noyau et l'image de f. L'endomorphisme f est-il un automorphisme de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$?

Exercice 38. — (Le retour des DL).

On considère l'application $\varphi : \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$

$$f \longmapsto P_f$$

qui à une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ associe la partie régulière de son développement limité à l'ordre 2 en 0, notée P_f.
On admet que φ est linéaire. Est-elle injective ? Surjective ?

Sev supplémentaires et projections

Exercice 39. — (Somme de sev). Soient E un $\mathbb{K}$-ev, F et G deux sev de E.

On définit la **somme** des sev F et G et on note $F+G$ la partie de E constituée des vecteurs de E pouvant s'écrire comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G, soit :

$$F + G = \left\{\overrightarrow{v} \in E,\ \exists \left(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}\right) \in F \times G,\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}\right\}$$

Montrer que $F+G$ est un sev de E.

Exercice 40. — (Somme de sev 2). Soient E un $\mathbb{K}$-ev, et $\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}, \overrightarrow{w_1}, \dots, \overrightarrow{w_p}$ $(n+p)$ vecteurs de E avec n et p dans $\mathbb{N}^*$.

Montrer que :

$$\mathrm{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}) + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \dots, \overrightarrow{w_p}) = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}, \overrightarrow{w_1}, \dots, \overrightarrow{w_p})$$

Exercice 41. — (Sev supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$).

Soient $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y-z=0\}$ et $G = \mathrm{Vect}((1,1,1))$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Exercice 42. — (Sev supplémentaires dans $\mathbb{K}_3[X]$).

Dans $E = \mathbb{K}_3[X]$, on considère F le sev des polynômes de E qui s'annulent en 0, et $G = \mathrm{Vect}(X+1)$.

Montrer que : $E = F \oplus G$

Exercice 43. — (Sev supplémentaires dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$).

Dans $E = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, on considère F le sev des matrices de E dont la somme des coefficients est nulle, et $G = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2)$.

Montrer que : $E = F \oplus G$

Exercice 44. — (Sev supplémentaires dans $\mathscr{C}([0;\pi], \mathbb{R})$).

Soit $E = \mathscr{C}([0;\pi], \mathbb{R})$. On considère les deux sev de E suivants :

$$F = \mathrm{Vect}(\cos, \sin) \qquad \text{et} \qquad G = \left\{f \in E,\quad f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\right\}.$$

Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

‖. Si possible en 3 lignes (en tous les cas, cela peut se faire en 3 lignes, 4 si vous comptez celle de la conclusion).

Exercice 45. — (Supplémentaires et projection). On considère le $\mathbb{R}$-ev $E = \mathscr{C}([0;1], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[0;1]$ et à valeurs réelles. Dans E, on considère le sev F des fonctions constantes et G le sev des fonctions continues et d'intégrale nulle sur $[0;1]$.

1/ Après vous être convaincu que F et G sont effectivement des sev de E, établir que F et G sont supplémentaires dans E.

2/ Déterminer le projeté de la fonction carrée $(x \longmapsto x^2)$ sur G parallèlement à F.

Exercice 46. — (Sev supplémentaires et projection).

Dans cet exercice, E désigne le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}_2[X]$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1/ Dans E on considère $F = \operatorname{Vect}\left(X^2 + X + 1,\ 5X + 2\right)$, et $G = \operatorname{Vect}(X^2 - X)$.

On pourra noter $P_1 = X^2 + X + 1$; $P_2 = 5X + 2$; $P_3 = X^2 - X$.

Etablir que : $\quad E = F \bigoplus G$.

2/ Déterminer le projeté de X sur F parallèlement à G.

Exercice 47. — (Sev supplémentaires et projection, bis).

Dans cet exercice, E désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Dans E, on considère $F = \operatorname{Vect}(E_{21})$, et G la partie de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices dont la somme des coefficients est nulle.

1/ Etablir que G est un sev de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et en déterminer une famille génératrice.

2/ Etablir que : $\quad E = F \bigoplus G$.

3/ Déterminer le projeté de la matrice I_2 sur F parallèlement à G ; puis l'image de I_2 par la symétrie par rapport à F parallèlement à G.