Exercices 21 — Fractions rationnelles

Exercice 1 — Déterminer la décomposition en éléments simples de $\mathbb{C}(X)$ des fractions rationnelles suivantes :

$$F_1 = \frac{3X}{(X-1)(X+1)(X+2)}\,; \qquad F_2 = \frac{X+3}{(X+1)\left(X^2-4\right)}\,; \qquad F_3 = \frac{X^2+3X+7}{X^2-3X+2}\,; \qquad F_4 = \frac{X+1}{X^2(X-1)^2}$$

Exercice 2 — 1/ On considère la fraction rationnelle : $F = \dfrac{3X^2-X+10}{X^4+2X^3-7X^2-8X+12}$.

a/ Quel est le degré de F ? Quelle est sa partie entière ?

b/ Décomposer en éléments simples F dans $\mathbb{R}(X)$.

Indication : les réels 1 et 2 sont racines du dénominateur.

2/ Pour tout entier $N \geqslant 3$, on pose : $S_N = \displaystyle\sum_{n=3}^{N} \frac{3n^2-n+10}{n^4+2n^3-7n^2-8n+12}$.

a/ Calculer S_N pour tout entier $N \geqslant 3$.

b/ Déduire de la question précédente que la suite $(S_N)_N$ est convergente, et préciser $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} S_N$.

Exercice 3 — 1/ On considère la fraction rationnelle : $F = \dfrac{X^2+5X-2}{X^4-2X^3-X^2+2X}$.

Décomposer en éléments simples F dans $\mathbb{R}(X)$.

Indication. Dans cette question, vous pouvez utiliser sans les justifier les éléments que voici : le polynôme $Q = X^4-2X^3-X^2+2X$ ne possède que des racines simples ; 2 est racine de Q ; enfin, Q possède deux racines opposées.

2/ Pour tout entier $N \geqslant 3$, on pose : $S_N = \displaystyle\sum_{n=3}^{N} \frac{n^2+5n-2}{n^4-2n^3-n^2+2n}$.

Etablir que la suite $(S_N)_N$ est convergente, et déterminer $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} S_N$.

Exercice 4 — **Théorique, mais pas trop compliqué 1.**
Démontrer les propriétés du degré dans $\mathbb{K}(X)$, à savoir :

$$\forall\,(F_1,F_2) \in \mathbb{K}(X)^2, \quad \deg(F_1F_2) = \deg(F_1)+\deg(F_2) \qquad \text{et} \qquad \deg(F_1+F_2) \leqslant \max\left(\deg(F_1),\deg(F_2)\right)$$

Exercice 5 — **Théorique, mais pas trop compliqué 2.** Démontrer que $(\mathbb{K}(X),+,\times)$ est un corps.

Exercice 6 — Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\mathbb{C}(X)$ de :

$$F = \frac{1}{X^n - 1}$$

Indication : on n'utilisera surtout pas la méthode d'identification :-)

Exercice 7 — Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\mathbb{C}(X)$ de :

$$F = \frac{X^{n-1}}{X^n - 1}$$

Indication : on n'utilisera surtout pas la méthode d'identification non plus !

Exercice 8 — Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\mathbb{C}(X)$ de :

$$F = \frac{n!}{X\,(X+1)\cdots(X+n)}$$

Exercice 9 — On considère la fraction rationnelle : $F = \dfrac{4X^2 + 8X + 1}{X^3 + 3X^2 + 4X + 12}$.

On pose : $Q = X^3 + 3X^2 + 4X + 12$.

1/ Vérifier que $z_0 = 2\,\mathrm{i}$ est racine de Q.

2/ Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle F.

Exercice 10 — Calculer l'intégrale :

$$I = \int_2^3 \frac{1}{x^3 - 1}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 11 — Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de :

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{x^4 + 1}$$

Quelques pistes et éléments de réponses

Exercice 1 — $F_1 = \dfrac{3X}{(X-1)(X+1)(X+2)} = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{X+2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{X+1} + \dfrac{1}{6}\dfrac{1}{X-1}$

$F_2 = \dfrac{X+3}{(X+1)\left(X^2-4\right)} = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{X+2} - \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{X+1} + \dfrac{5}{12}\dfrac{1}{X-2}$

$F_3 = \dfrac{X^2+3X+7}{X^2-3X+2} = 1 + \dfrac{17}{X-2} - \dfrac{11}{X-1}$

$F_4 = \dfrac{X+1}{X^2(X-1)^2} = \dfrac{3}{X} + \dfrac{1}{X^2} - \dfrac{3}{(X-1)} + \dfrac{2}{(X-1)^2}$

Exercice 2 — 1/ On considère la fraction rationnelle : $F = \dfrac{3X^2-X+10}{X^4+2X^3-7X^2-8X+12}$.

a/ D'après le cours : $\boxed{\deg\left(\dfrac{3X^2-X+10}{X^4+2X^3-7X^2-8X+12}\right) = -2}$. La partie entière de F est donc $\boxed{\text{nulle}}$.

b/ Notons $Q = X^4+2X^3-7X^2-8X+12$. D'après l'énoncé, Q admet 1 et 2 pour racines. Il s'ensuit que $(X-1)(X-2)$ divise le polynôme Q.

En effectuant la division euclidienne de Q par $(X-1)(X-2)$, on obtient : $Q = (X-1)\,(X-2)(X^2+5X+6)$. Le polynôme du second degré se factorisant aisément, on en déduit que : $Q = (X-1)(X-2)(X+2)(X+3)$.

Par suite : $F = \dfrac{3X^2-X+10}{(X-1)(X-2)(X+2)(X+3)}$.

On déduit de cette écriture et du théorème de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ que :

$$\exists!\ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4,\ F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{X+2} + \frac{d}{X+3}$$

Puisque F ne possède que des pôles simples, les réels a, b, c et d peuvent être trouvés à l'aide de la formule du cours idoine.*

En notant $P = 3X^2-X+10$, et $Q = X^4+2X^3-7X^2-8X+12$, on a : $Q' = 4X^3+6X^2-14X-8$. Par conséquent :

$a = \dfrac{P(1)}{Q'(1)} = \dfrac{12}{-12} = -1\,;\quad b = \dfrac{P(2)}{Q'(2)} = \dfrac{20}{20} = 1\,;\quad c = \dfrac{P(-2)}{Q'(-2)} = \dfrac{24}{12} = 2\,;\quad d = \dfrac{P(-3)}{Q'(-3)} = \dfrac{40}{-20} = -2.$

$\boxed{\textbf{Conclusion.}\ \dfrac{3X^2-X+10}{(X-1)(X-2)(X+2)(X+3)} = \dfrac{1}{X-2} - \dfrac{1}{X-1} + \dfrac{2}{X+2} - \dfrac{2}{X+3}}$.

2/ Soit un entier $N \geqslant 3$. D'après la question précédente :

$$S_N = \sum_{n=3}^{N} \frac{3n^2-n+10}{n^4+2n^3-7n^2-8n+12} = \sum_{n=3}^{N}\left[\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+3}\right]$$

*. "$\dfrac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$". Les coefficients a, b, c et d peuvent également être obtenus par "multiplication/évaluation".

D'où : $S_N = \left(\sum_{n=3}^{N}\left[\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right]\right) + 2\left(\sum_{n=3}^{N}\left[\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right]\right)$

Ayant reconnu deux sommes téléscopiques, on en déduit que :

$$S_N = 1 - \frac{1}{N-1} + 2\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{N+3}\right) = \frac{7}{5} - \frac{1}{N-1} - \frac{2}{N+3}$$

$\boxed{\textbf{Conclusion}.\ \forall N \in \mathbb{N},\ N \geqslant 3,\ S_N = \frac{7}{5} - \frac{1}{N-1} - \frac{2}{N+3}}$

3/ On déduit immédiatement de ce qui précède que : $\boxed{(S_N)_N \text{ est convergente, et } \lim_{N\to+\infty} S_N = \frac{7}{5}}$.

Exercice 3 — 1/ Avec les indications de l'énoncé, on obtient aisément :

$$X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X = X(X-1)(X+1)(X-2)$$

Puisque la partie entière de la fraction rationnelle F est nulle, et que tous ses pôles sont simples, il existe un unique quadruplet (a,b,c,d) de réels tels que :

$$\frac{X^2+5X-2}{X^4-2X^3-X^2+2X} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+1} + \frac{d}{X-2}$$

Ces réels peuvent être déterminés par "multiplication-évaluation", ou directement grâce à la formule du cours "$P(\alpha)/Q'(\alpha)$". En notant P et Q les numérateur et dénominateur de F respectivement, on a :

$$a = \frac{P(0)}{Q'(0)} = -1\,; \quad b = \frac{P(1)}{Q'(1)} = -2\,; \quad c = \frac{P(-1)}{Q'(-1)} = 1\,; \quad d = \frac{P(2)}{Q'(2)} = 2$$

$\boxed{\textbf{Conclusion}.\ \frac{X^2+5X-2}{X^4-2X^3-X^2+2X} = \frac{1}{X+1} - \frac{1}{X} + \frac{2}{X-2} - \frac{2}{X-1}}$.

2/ Soit N un entier $\geqslant 3$. D'après la question précédente, on a :

$$S_N = \sum_{n=3}^{N} \frac{n^2+5n-2}{n^4-2n^3-n^2+2n} = \sum_{n=3}^{N}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{2}{n-2} - \frac{2}{n-1}\right)$$

$$= \sum_{n=3}^{N}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) + 2\sum_{n=3}^{N}\left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) = \frac{1}{N+1} - \frac{1}{3} + 2\left(1 - \frac{1}{N-1}\right)$$

On en déduit que : $\boxed{S_N = \frac{5}{3} + \frac{1}{N+1} - \frac{2}{N+1}}$.

En particulier, la suite (S_N) est convergente et : $\boxed{\lim_{N\to+\infty} S_N = \frac{5}{3}}$.

Exercice 4 — Utiliser les propriétés connues du degré pour les polynômes.

Exercice 5 — Observer que $(\mathbb{K}(X), +)$ est un groupe abélien, que la loi $\times$ est associative, commutative, possède un neutre, et que tout élément non nul de $\mathbb{K}(X)$ est inversible.

Exercice 6 — Utiliser la “formule miracle : $\lambda_i = \dfrac{P(\alpha_i)}{Q'(\alpha_i)}$”.

Exercice 7 — Utiliser la “formule miracle : $\lambda_i = \dfrac{P(\alpha_i)}{Q'(\alpha_i)}$”.

Exercice 8 — Utiliser la “formule miracle : $\lambda_i = \dfrac{P(\alpha_i)}{Q'(\alpha_i)}$”.

Exercice 9 — On a : $F = \dfrac{4X^2+8X+1}{X^3+3X^2+4X+12}$. On pose : $Q = X^3+3X^2+4X+12$.

On vérifie aisément que $Q(2\mathrm{i}) = 0$.

Puisque Q est à coefficients réels, on en déduit que $(-2\mathrm{i})$ est également racine de Q. Il s'ensuit que $(X-2\mathrm{i})(X+2\mathrm{i}) = \left(X^2+4\right)$ divise Q. Le polynôme Q étant de degré 3, de coefficient dominant 1 et de coefficient constant 12, on a : $Q = (X^2+4)(X+3)$.

Conclusion. La DPI de $Q = X^3+3X^2+4X+12$ dans $\mathbb{R}[X]$ est : $Q = (X^2+4)(X+3)$.

b/ La fraction rationnelle F est de degré -1 ; sa partie entière est donc nulle. D'après le théorème de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$:

$$\exists!\,(a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \quad F = \frac{a}{X+3} + \frac{bX+c}{X^2+4}$$

Puisque -3 est un pôle simple de F, on a : $a = \dfrac{P(-3)}{Q'(-3)} = \dfrac{13}{13} = 1$.

En procédant (une fois n'est pas coutume) par identification, on obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} b+1 & = & 4 \\ c+3b & = & 8 \\ 4+3c & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} b=3 \\ c=-1 \end{array}\right.$$

Conclusion. La DES de $F = \dfrac{4X^2+8X+1}{X^3+3X^2+4X+12}$ dans $\mathbb{R}(X)$ est : $F = \dfrac{1}{X+3} + \dfrac{3X-1}{X^2+4}$.

Exercice 10 — Une primitive sur $[2,3]$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{x^3-1}$ est :

$$x \longmapsto \frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

La valeur de I s'en déduit.

Exercice 11 — Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{x^4+1}$ est :

$$x \longmapsto 2^{-5/2}\ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right) + 2^{-3/2}\left(\arctan\left(\sqrt{2}x-1\right) + \arctan\left(\sqrt{2}x+1\right)\right)$$