

PROBLÈME DE LA SEMAINE 10

EXERCICE 1 — (APPLICATIONS DIRECTES DU COURS).

- 1) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f : x \mapsto (1 - x^2) e^{2x}$.
- 2) Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $g : x \mapsto \ln(\cos(x))$.
- 3) On considère la fonction $h : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(2x) - 2 \sin(x)$.

a) Montrer que : $h(x) \underset{0}{\sim} \alpha x^n$, où α est un réel et n un entier à déterminer.

b) Dédire de la question précédente les limites suivantes, en justifiant brièvement les résultats :

$$\ell_2 = \lim_{x \xrightarrow{>0} 0} \frac{\sin(2x) - 2 \sin(x)}{x^2}; \quad \ell_3 = \lim_{x \xrightarrow{>0} 0} \frac{\sin(2x) - 2 \sin(x)}{x^3}; \quad \ell_4 = \lim_{x \xrightarrow{>0} 0} \frac{\sin(2x) - 2 \sin(x)}{x^4}$$

EXERCICE 2 — (ASYMPTOTE). On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$$

- 1) Tiens, au fait, pourquoi f peut-elle être définie sur $\mathbb{R}$ tout entier par la formule ci-dessus ?
- 2) Montrer que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f admet une asymptote (notée D) dont on donnera une équation. Préciser la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de D au voisinage de $+\infty$.

EXERCICE 3 — (DL, ÉQUIVALENTS).

- 1) Rappeler le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\cos(x)$, et celui de $\sqrt{1-x}$ à l'ordre 2 en 0.
- 2) Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\sqrt{1-x^2}$.
- 3) Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$u_n = n^4 \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \right)$$

EXERCICE 4 — (POUR VOUS CHANGER LES IDÉES ENTRE DEUX EXERCICES).

Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{C}$, l'équation

$$(E) : \quad e^{2x} + 2021 e^x - 2022 = 0$$

EXERCICE 5 — (PARABOLE ASYMPTOTE).

D'ordinaire, une asymptote en $+\infty$ à une courbe $\mathcal{C}$ désigne pour vous une *droite* D , telle que “ $\mathcal{C}$ est arbitrairement proche de D au voisinage de $+\infty$ ”.

Pour rappeler la définition précise, on dit que $\mathcal{C}_f$ (représentant une fonction f définie au voisinage de $+\infty$) admet pour asymptote la droite D d'équation $y = ax + b$ au voisinage de $+\infty$ si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

Cette définition peut être généralisée.

Explicitement, nous dirons que $\mathcal{C}_f$ (représentant une fonction f définie au voisinage de $+\infty$) admet pour **asymptote la parabole P d'équation $y = ax^2 + bx + c$ au voisinage de $+\infty$** si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax^2 + bx + c)] = 0$$

L'objet de cet exercice est d'étudier un exemple de telle situation.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ en posant :

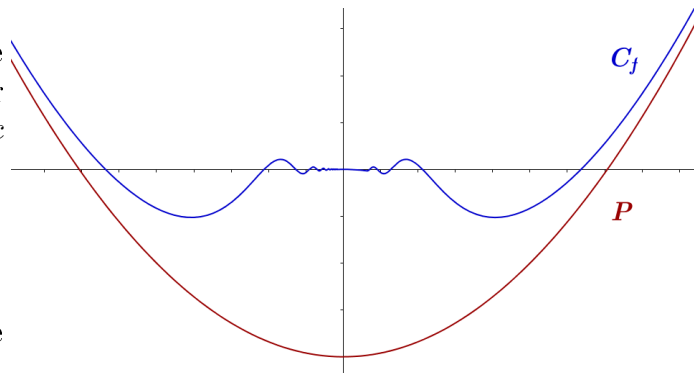
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = x^2 \cos\left(\frac{2}{x}\right)$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f (c'est la courbe de l'illustration ci-dessus).

- 1) Calculer la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. En déduire que $\mathcal{C}_f$ ne peut admettre de droite asymptote au voisinage de $+\infty$.
- 2) Déterminer cinq réels a_0, a_1, a_2, a_3 et a_4 tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \cos\left(\frac{2}{x}\right) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_4}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

- 3) Déduire de la question précédente que $\mathcal{C}_f$ admet une parabole P asymptote au voisinage de $+\infty$. On précisera une équation de P , ainsi que la position relative de $\mathcal{C}_f$ et P au voisinage de $+\infty$.



EXERCICE 6 — (DÉRIVÉES SUCCESSIVES).

On considère, pour tout n de $\mathbb{N}$ les fonctions :

$$f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!} \quad \text{et} \quad L_n : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x f_n^{(n)}(x)$$

où $f_n^{(n)}$ désigne la dérivée n -ième de f_n .

1) Calculer, pour tout x de $\mathbb{R}$, $L_0(x)$, $L_1(x)$ et $L_2(x)$.

2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k.$$

3) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, L_n est une fonction polynômiale, dont on pourra préciser le degré.

4) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f'_{n+1}(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x).$$

5) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x).$$

6) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = \frac{x}{n+1} f_n(x).$$

7) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, (n+1) L_{n+1}(x) = x L'_n(x) + (n+1-x) L_n(x).$$

8) Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x L''_n(x) - (x-1) L'_n(x) + n L_n(x) = 0.$$