Colle 22 – Questions de cours

Question de cours 1. — **Propriété** : si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, alors $\ker f$ est un sev de E et $\mathrm{Im}\ f$ est un sev de F.

Preuve. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

Montrons que $\ker f$ est un sev de E. Par définition, $\ker f$ est une partie de E. Le vecteur nul y appartient, puisque $f\left(\overrightarrow{0_E}\right) = \overrightarrow{0_F}$ pour toute application linéaire f entre E et F.

Il reste à établir que $\ker f$ est stable par combinaison linéaire. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans $\ker f$, et λ et μ deux scalaires.

Alors : $f(\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}) = \lambda f(\overrightarrow{u}) + \mu f(\overrightarrow{v}) = \lambda \overrightarrow{0_F} + \mu \overrightarrow{0_F} = \overrightarrow{0_F}$; la première égalité provenant de la définition d'application linéaire, et la seconde du fait que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dans le noyau de f par hypothèse. Par conséquent : $\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v} \in \ker f$, et $\ker f$ est donc stable par combinaison linéaire.

Conclusion : $\ker f$ est une partie de E, contenant $\overrightarrow{0}_E$, et stable par combinaison linéaire. Par suite, $\ker f$ est un sev de E.

Montrons que $\mathrm{Im} f$ est un sev de F. Par définition, $\mathrm{Im} f$ est une partie de F. Le vecteur nul (de F) y appartient, puisque $\overrightarrow{0_F} = f\left(\overrightarrow{0_E}\right)$ pour toute application linéaire f entre E et F.

Il reste à établir que $\mathrm{Im} f$ est stable par combinaison linéaire. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans $\mathrm{Im} f$, et λ et μ deux scalaires.

Par hypothèse, il existe deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ de E tels que $f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{u}$ et $f\left(\overrightarrow{b}\right) = \overrightarrow{v}$. Par conséquent :

$f\left(\lambda \overrightarrow{a} + \mu \overrightarrow{b}\right) = \lambda f(\overrightarrow{a}) + \mu f\left(\overrightarrow{b}\right) = \lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}$; la première égalité provenant de la définition d'application linéaire, et la seconde des définitions respectives des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Il s'ensuit que $\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v} \in \mathrm{Im} f$ (puisqu'il admet pour antécédent $\lambda \overrightarrow{a} + \mu \overrightarrow{b}$). Ainsi $\mathrm{Im} f$ est stable par combinaison linéaire.

Conclusion : $\mathrm{Im} f$ est une partie de F, contenant $\overrightarrow{0}_F$, et stable par combinaison linéaire. Par suite, $\mathrm{Im} f$ est un sev de F.

Question de cours 2. — **Exercice.** On considère l'application :

$$f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$$
$$P \longmapsto P - X^2 P''$$

On admet que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer le noyau et l'image de f.

Corrigé. Le noyau de f est par définition :

$$\ker(f) = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X],\ f(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}\right\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ker(f) = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P = X^2 P''\right\}$$

Déterminer $\ker(f)$ revient donc à résoudre l'équation polynomiale $P = X^2 P''$. Après avoir observé que le polynôme nul est solution, la comparaison des degrés ne donne aucune info décisive ($n = n \ldots$). En revanche, celle des coefficients dominants est plus intéressante. En notant a_n le coef dominant de P, on obtient :

$$a_n = n(n-1)a_n \qquad \text{d'où}^* : \quad n(n-1) = 1$$

Or $n(n-1)$ est un entier pair, ce qui n'est pas vraiment le cas de 1 ;-)

On en déduit que l'équation $P = X^2 P''$ admet comme unique solution le polynôme nul.

Conclusion. Le noyau de f est : $\ker(f) = \left\{0_{\mathbb{R}_2[X]}\right\}$. L'endomorphisme f est donc **injectif**.

*. Puisque le coefficient dominant a_n est nécessairement non nul.

Déterminons à présent l'image de f. L'espace de départ de f est $\mathbb{R}_2[X]$, et : $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}\left(1, X, X^2\right)$

D'après le cours, on en déduit que : $\text{im}(f) = \text{Vect}\left(f(1), f(X), f(X^2)\right)$.

Par suite : $\text{im}(f) = \text{Vect}\left(1, X, -X^2\right) = \text{Vect}\left(1, X, X^2\right) = \mathbb{R}_2[X]$.

Conclusion. L'image de f est : $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_2[X]$. L'endomorphisme f est donc **surjectif**.

Synthèse. f est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Question de cours 3. — **Exercice**. Soit $E = \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble S des fonctions f de E solutions de $y'' = 2y' - 2y$ est un sev de E, et en donner une famille génératrice.

Corrigé. Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On a :

$$f \in F \Longleftrightarrow f'' - 2f' + 2f = 0$$

Puisque $y'' - 2y' + 2y = 0$ est une EDL2, le cours donne sa solution générale. L'équa. caractéristique associée $r^2 - 2r + 2 = 0$ possède deux racines complexes conjuguées $1 \pm \mathrm{i}$. On en déduit que :

$$f'' - 2f' + 2f = 0 \Longleftrightarrow \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^x\left(\lambda\cos(x) + \mu\sin(x)\right)$$

Par suite : $f \in F \Longleftrightarrow \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ f = \lambda g + \mu h$ (avec $g(x) = \mathrm{e}^x\cos(x)$ et $h(x) = \mathrm{e}^x\sin(x)$).

Finalement : $f \in F \Longleftrightarrow \text{Vect}(g, h)$.

Conclusion. $F = \text{Vect}\,(g, h)$. En particulier F est un sev de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, le sev engendré par les fonctions g et h.

Question de cours 4. — **Exercice**. On considère l'application :

$$f : \mathrm{M}_2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{K})$$
$$M \longmapsto M - M^T$$

On admet que f est un endomorphisme de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$. Déterminer le noyau et l'image de f.

Corrigé. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{K})$. Par définition de noyau :

$$[M \in \ker f] \Longleftrightarrow \left[f(M) = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{K})}\right] \Longleftrightarrow \left[M - M^T = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{K})}\right] \Longleftrightarrow \left[M = M^T\right]$$

Conclusion. Le noyau de f est le sev des matrices symétriques de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$.

Déterminons à présent l'image de f. On a :

$$\mathrm{M}_2(\mathbb{K}) = \text{Vect}(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$$

D'après le cours, on en déduit que : $\text{Im}f = \text{Vect}(f(E_{11}), f(E_{12}), f(E_{21}), f(E_{22}))$

On vérifie alors que : $\text{Im}f = \text{Vect}(0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{K})}, E_{12} - E_{21}, E_{21} - E_{12}, 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{K})})$. Par suite : $\text{Im}f = \text{Vect}(E_{12} - E_{21})$

Conclusion. $\text{Im}f = \text{Vect}\,(E_{12} - E_{21})$, càd : $\text{Im}f = \left\{\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix},\ b \in \mathbb{R}\right\}$.

En d'autres termes : $\text{Im}f = \mathrm{A}_2(\mathbb{K})$

Question de cours 5. — **Exercice**. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. Montrer que l'ensemble F des polynômes P de E tels que : $\displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t = 0$ est un sev de $\mathbb{R}_3[X]$, et en déterminer une famille génératrice.

Corrigé. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X] : \exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4,\ P = aX^3 + bX^2 + cX + d$.

On a : $P \in F \Longleftrightarrow \displaystyle\int_{-1}^{1} at^3 + bt^2 + ct + d\,\mathrm{d}t = 0 \Longleftrightarrow \int_{-1}^{1} bt^2 + d\,\mathrm{d}t = 0 \Longleftrightarrow 2\left[\frac{bt^3}{3} + dt\right]_0^1 = 0$

$$\Longleftrightarrow \frac{2b}{3} + 2d = 0 \Longleftrightarrow b = -3d$$

En résumé :

$P \in F \Longleftrightarrow \exists (a,c,d) \in \mathbb{R}^3,\ P = aX^3 - 3dX^2 + cX + d \Longleftrightarrow \exists (a,c,d) \in \mathbb{R}^3,\ P = aX^3 + d(1-3X^2) + cX$

Par suite : $P \in F \Longleftrightarrow P \in \mathrm{Vect}\left(X^3, 1-3X^2, X\right)$

Conclusion. $F = \mathrm{Vect}\left(X^3, 1-3X^2, X\right)$. En particulier F est un sev de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Question de cours 6. — **Exercice**. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$). Montrer que l'application :

$$\varphi : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$$
$$A \longmapsto P^{-1}AP$$

est un automorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Preuve. Montrons que φ est linéaire. Soient A et B dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. On a :

$$\varphi(\lambda A + \mu B) = P^{-1}(\lambda A + \mu B)P = \lambda P^{-1}AP + \mu P^{-1}BP = \lambda\varphi(A) + \mu\varphi(B)$$

Ainsi, φ est linéaire, définie sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et à valeurs dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$: φ est donc un endomorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Posons alors :

$$\psi : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$$
$$A \longmapsto PAP^{-1}$$

Un raisonnement analogue au précédent assure que ψ est également un endomorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

On vérifie facilement que : $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathrm{M}_n(\mathbb{K})}$ et $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathrm{M}_n(\mathbb{K})}$. Ce qui implique en particulier que φ est bijectif.

On a ainsi établi que φ est un endomorphisme bijectif de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Conclusion. φ est un automorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ ($\varphi \in \mathrm{GL}(\mathrm{M}_n(\mathbb{K}))$).

Question de cours 7. — **Propriété**. Soient F_1 et F_2 deux sev d'un même $\mathbb{K}$-ev E.

Alors $F_1 \cap F_2$ est un sev de E.

Preuve. Soient F_1 et F_2 deux sev de E.

➤ Alors $F_1 \cap F_2 \subset E$, puisque F_1 et F_2 sont deux parties de E.

➤ On peut affirmer que $\overrightarrow{0_E} \in F_1 \cap F_2$, car $\overrightarrow{0_E} \in F_1$ et $\overrightarrow{0_E} \in F_2$.

➤ Soient enfin $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs dans $F_1 \cap F_2$, et λ et μ deux scalaires. Alors : $\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$ appartient à F_1 (*resp.* F_2) car $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ appartiennent en particulier à F_1 (*resp.* à F_2) et F_1 (*resp.* F_2) est un sev de E (donc stable par combinaison linéaire). Il s'ensuit que : $\forall\,(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \in (F_1 \cap F_2)^2,\ \forall\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} \in F_1 \cap F_2$.

Conclusion. En résumé, $F_1 \cap F_2$ est une partie du $\mathbb{K}$-ev E, contenant le vecteur nul de E, et stable par combinaison linéaire. En d'autres termes, $F_1 \cap F_2$ est un sev de E.

Question de cours 8. — **Propriété**. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On suppose qu'il existe une famille $(\overrightarrow{v}_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ génératrice de E, c'est-à-dire une famille de vecteurs de E tels que $E = \text{Vect}\left((\overrightarrow{v}_i)_{i\in[\![1,n]\!]}\right)$. Alors :

$$\text{Im} f = \text{Vect}\left((f(\overrightarrow{v}_i))_{i\in[\![1,n]\!]}\right)$$

Preuve. ➤ Montrons l'inclusion : $\text{Im} f \subset \text{Vect}\left((f(\overrightarrow{v}_i))_{i\in[\![1,n]\!]}\right)$. Soit $\overrightarrow{V} \in \text{Im} f$. Il existe un vecteur $\overrightarrow{u}$ de E tel que : $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{V}$.

Puisque la famille $(\overrightarrow{v}_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est génératrice de E : $\exists\,(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \overrightarrow{u} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{v}_i$.

Ainsi : $\overrightarrow{V} = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{v}_i\right)$ et par linéarité de f : $\overrightarrow{V} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(\overrightarrow{v}_i)$, d'où : $\overrightarrow{V} \in \text{Vect}\left((f(\overrightarrow{v}_i))_{i\in[\![1,n]\!]}\right)$.

$\boxed{\underline{\text{Conclusion}} : \text{Im} f \subset \text{Vect}\left((f(\overrightarrow{v}_i))_{i\in[\![1,n]\!]}\right)}$

➤ Montrons l'inclusion : $\text{Vect}\left((f(\overrightarrow{v}_i))_{i\in[\![1,n]\!]}\right) \subset \text{Im} f$. Soit $\overrightarrow{V} \in \text{Vect}\left((f(\overrightarrow{v}_i))_{i\in[\![1,n]\!]}\right)$.

Alors : $\exists\,(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \overrightarrow{V} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(\overrightarrow{v}_i)$.

Par linéarité de f, on a : $\overrightarrow{V} = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{v}_i\right)$, d'où $\overrightarrow{V} \in \text{Im} f$. $\boxed{\underline{\text{Conclusion}} : \text{Vect}\left((f(\overrightarrow{v}_i))_{i\in[\![1,n]\!]}\right) \subset \text{Im} f}$

Finalement : $\boxed{\text{Im} f = \text{Vect}\left((f(\overrightarrow{v}_i))_{i\in[\![1,n]\!]}\right)}$

Question de cours 9. — **Théorème**. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. f est injective SSI $\ker\ f = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

Preuve. On raisonne par double implication, pour faire preuve d'originalité.

➤ Supposons f injective. On a déjà $\left\{\overrightarrow{0}_E\right\} \subset \ker\ f$ puisque $\ker\ f$ est un sev de E. Réciproquement, soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur de $\ker\ f$. Alors $f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}_F$. Comme par ailleurs f est linéaire, on a aussi : $f\left(\overrightarrow{0}_E\right) = \overrightarrow{0}_F$. Donc $f(\overrightarrow{v}) = f\left(\overrightarrow{0}_E\right)$, et on en déduit $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}_E$ par injectivité de f. Ce qui assure que $\ker\ f = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$.

En résumé : $[f \text{ injective}] \Longrightarrow \left[\ker\ f = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}\right]$.

➤ Réciproquement, supposons $\ker\ f = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$. Soient $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ deux vecteurs de E tels que $f(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{w})$. Alors : $f(\overrightarrow{v}) - f(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{0}_F$, d'où par linéarité de f : $f(\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{0}_F$. Par suite, $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} \in \ker\ f$, et puisque le noyau de f est réduit au vecteur nul par hypothèse, on en déduit que $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}_E$, d'où : $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$.

On vient donc d'établir que $[f(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{w})] \Longrightarrow [\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}]$, ce qui prouve l'injectivité de f.

Par suite : $\left[\ker\ f = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}\right] \Longrightarrow [f \text{ injective}]$.

On déduit de cette implication et de celle établie plus haut l'équivalence : $\boxed{\left[\ker\ f = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}\right] \Longleftrightarrow [f \text{ injective}]}$