MPSI – Colle 22 (3 au 7 avril 2023) : Espaces vectoriels et applications linéaires

Chapitre 20 : Espaces vectoriels et applications linéaires

1 – Espaces vectoriels Définition, exemples généraux.

2 – Sous-espaces vectoriels Définition, et caractérisation.

3 – Combinaisons linéaires (finies), familles génératrices

4 – Applications linéaires

Définition : une application $f : E \longrightarrow F$ entre deux $\mathbb{K}$-ev est **linéaire** si :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2,\ f(\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}) = \lambda f(\overrightarrow{u}) + \mu f(\overrightarrow{v})$$

Un **endomorphisme** de E est une application linéaire de E dans lui-même ("$F = E$").

Remarque : trois propriétés peuvent être obtenues comme conséquences immédiates de la définition. Si $f : E \longrightarrow F$ est linéaire, alors :

➤ $\forall\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2,\ f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v})$

("l'image d'une somme est la somme des images")

➤ $\forall\ (\lambda, \overrightarrow{v}) \in \mathbb{K} \times E,\ f(\lambda \overrightarrow{v}) = \lambda f(\overrightarrow{v})$

("f est compatible avec la loi externe")

➤ $f\left(\overrightarrow{0}_E\right) = \overrightarrow{0}_F$ *("f envoie le vecteur nul sur le vecteur nul")*

Notations : $\mathscr{L}(E, F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E dans F, $\mathscr{L}(E)$ celui des endomorphismes de E.

5 – Ker et Im : noyau et image d'une applications linéaires

Définition : soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On appelle **noyau de** f et on note $\ker f$ le sous-ensemble de E suivant :

$$\ker f = \left\{\overrightarrow{v} \in E \mid f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}_F\right\}.$$

L'**image de** f, notée $\mathrm{Im}\ f$ la partie de F suivante :

$$\mathrm{Im}\ f = \{\overrightarrow{w} \in F \mid \exists\ \overrightarrow{v} \in E,\ f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{w}\}$$

Exemple : l'application qui à un polynôme P associe son polynôme dérivé est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$, dont le noyau est le sev des polynômes constants, et l'image est le sev des polynômes de degré au plus $n-1$.

Propriété : si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, alors $\ker f$ est un sev de E et $\mathrm{Im}\ f$ est un sev de F.

Remarques pratiques : *déterminer le noyau* d'une application linéaire revient à résoudre une équation ("$f(\overrightarrow{v}) = 0$"). Il faut alors avoir présent à l'esprit que suivant l'espace vectoriel dans lequel on travaille, cette équation peut être une équation polynomiale, une équation différentielle, un système linéaire, une équation matricielle… *Déterminer l'image* d'une application linéaire peut s'avérer une opération plus délicate. Dans le cas où l'on dispose d'une famille génératrice de l'espace de départ (par exemple si $E = \mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{K}_n[X]$ ou $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$), la propriété ci-dessous donne une méthode pratique pour y parvenir.

Propriété : soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On suppose qu'il existe une famille $(\overrightarrow{v}_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ génératrice de E, c'est-à-dire une famille de vecteurs de E tels que $E = \mathrm{Vect}\left((\overrightarrow{v}_i)_{i \in [\![1,n]\!]}\right)$. Alors :

$$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\left((f(\overrightarrow{v}_i))_{i \in [\![1,n]\!]}\right)$$

Théorème : soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors : f est injective SSI $\ker\ f = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$; et f est surjective SSI $\mathrm{Im}\ f = F$.

Questions de cours

- **Propriété**. Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $\ker f$ est un sev de E et $\operatorname{Im} f$ est un sev de F.
- **Exercice**. On considère l'application $f : P \in \mathbb{R}_2[X] \longmapsto P - X^2 P'' \in \mathbb{R}_2[X]$. Déterminer le noyau et l'image de f.
- **Exercice**. Soit $E = \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble S des fonctions f de E solutions de $y'' = 2y' - 2y$ est un sev de E, et en donner une famille génératrice.
- **Exercice**. Soit $E = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. On considère l'application $f : M \in E \longmapsto M - M^T \in E$. Déterminer le noyau et l'image de f.
- **Exercice**. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. Montrer que l'ensemble F des polynômes P de E tels que : $\displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t = 0$ est un sev de $\mathbb{R}_3[X]$, et en déterminer une famille génératrice.
- **Exercice**. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$). Montrer que l'application : $\varphi : A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto P^{-1}AP \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est un automorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Les 3 questions de cours suivantes sont sur le principe du volontariat

- **Propriété**. L'intersection de 2 sev de E est un sev de E.
- **Propriété**. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On suppose qu'il existe une famille $(\overrightarrow{v}_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ génératrice de E, c'est-à-dire une famille de vecteurs de E tels que $E = \mathrm{Vect}\left((\overrightarrow{v}_i)_{i\in[\![1,n]\!]}\right)$.
  Alors : $\quad \operatorname{Im} f = \mathrm{Vect}\left((f(\overrightarrow{v}_i))_{i\in[\![1,n]\!]}\right)$
- **Théorème**. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. f est injective SSI $\ker f = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

Compétences-clefs

- Connaître son cours (vocabulaire et propriétés)
- Montrer que "quelquechose" est un sev d'un espace donné (axiomes "(SEV i)", ou "Vect", ou "Ker")
- Montrer qu'une application est linéaire
- Déterminer le noyau (résolution d'une équation) et l'image d'une application linéaire ("Im f = Vect (f(v1),…)")