Colle 23 – Questions de cours

Question de cours 1. — **Propriétés** : la composée de deux isomorphismes est un isomorphisme. Si f est un isomorphisme entre E et F, alors f^{-1} est un isomorphisme entre F et E.

Preuve. Soient f et g deux isomorphismes, tels que $g \circ f$ soit défini. Alors l'application $g \circ f$ est bijective (car la composée de deux bijections en est une), et $g \circ f$ est linéaire (vérication aisée). Ainsi $g \circ f$ est un isomorphisme, ce qui prouve la première assertion.

Passons à la seconde : considérons f un isomorphisme entre E et F. Puisque f est en particulier une application bijective, sa réciproque $f^{-1} \in E^F$ existe. Soient alors $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ deux vecteurs de F, et soient λ et μ deux scalaires.

Puisque f est bijective (c'est un isomorphisme), il existe un (unique) vecteur $\overrightarrow{u} \in E$ et un (unique) vecteur $\overrightarrow{v} \in E$ tels que : $\overrightarrow{U} = f\left(\overrightarrow{u}\right)$ et $\overrightarrow{V} = f\left(\overrightarrow{v}\right)$ (càd : $\overrightarrow{u} = f^{-1}\left(\overrightarrow{U}\right)$ et $\overrightarrow{v} = f^{-1}\left(\overrightarrow{V}\right)$). On a alors :

$$f^{-1}\left(\lambda\overrightarrow{U} + \mu\overrightarrow{V}\right) = f^{-1}\left(\lambda f\left(\overrightarrow{u}\right) + \mu f\left(\overrightarrow{v}\right)\right) = f^{-1}\left(f\left(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}\right)\right) = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} = \lambda f^{-1}\left(\overrightarrow{U}\right) + \mu f^{-1}\left(\overrightarrow{V}\right)$$

En résumé : $\forall \left(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}\right) \in F^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ f^{-1}\left(\lambda\overrightarrow{U} + \mu\overrightarrow{V}\right) = \lambda f^{-1}\left(\overrightarrow{U}\right) + \mu f^{-1}\left(\overrightarrow{V}\right)$. Ce qui signifie que f^{-1} est linéaire. Puisqu'en outre f^{-1} est bijective, c'est un isomorphisme entre F et E, ce qui prouve la seconde assertion.

Question de cours 2. — **Exercice**. Soient $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\right\}$ et $G = \text{Vect}\left((1, 1, 1)\right)$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Preuve. On a : $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Soit $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On cherche 3 réels a, b et c tels que :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'égalité précédente est équivalente au système :

$$\begin{cases} a + c = X \\ b + c = Y \\ a + b + c = Z \end{cases} \iff \begin{cases} a = Z - Y \\ b = Z - X \\ c = X + Y - Z \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \underbrace{(Z - Y)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (Z - X)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{(X + Y - Z)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in G}$$

On a donc établi que :

$$\forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3,\ \exists \left(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}\right) \in F \times G, \qquad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$$

Autrement dit : $\mathbb{R}^3 = F + G$ $\quad (\spadesuit)$.

Par ailleurs, si $\overrightarrow{v}$ appartient à $F \cap G$, alors il existe λ tel que $\overrightarrow{v} = (\lambda, \lambda, \lambda)$ (puisque $\overrightarrow{v}$ est dans G) ; et $\lambda + \lambda - \lambda = \lambda = 0$ (puisque $\overrightarrow{v}$ appartient à F). On en déduit que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Par conséquent : $F \cap G = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ $\quad (\clubsuit)$.

Conclusion. D'après $(\spadesuit)$, $(\clubsuit)$, et la caractérisation des sev supplémentaires : $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Question de cours 3. — **Exercice**. Dans $E = \mathbb{K}_3[X]$, on considère F le sev des polynômes de E qui s'annulent en 0, et $G = \mathrm{Vect}\,(X+1)$. Montrer que : $E = F \oplus G$.

Preuve. Soit $P \in \mathbb{K}_3[X]$. Notons : $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ (avec a, b, c et d dans $\mathbb{K}$).

Supposons qu'il existe deux polynômes Q dans F et R dans G tels que $P = Q + R$. Alors :

$$Q = \alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X \qquad \text{et} \qquad R = \lambda(X+1)$$

Donc :
$$aX^3+bX^2+cX+d = \alpha X^3+\beta X^2+\gamma X+\lambda(X+1) \Longleftrightarrow aX^3+bX^2+cX+d = \alpha X^3+\beta X^2+(\gamma+\lambda)\,X+\lambda$$

Par identification :

$$\alpha = a\,; \qquad \beta = b\,; \qquad \lambda = d\,; \qquad \gamma = c - d$$

En résumé :

$$\underbrace{aX^3+bX^2+cX+d}_{=P} = \underbrace{\left(aX^3+\beta X^2+(c-d)X\right)}_{=Q\in F} + \underbrace{d(X+1)}_{=R\in G}$$

On a donc établi que :

$$\forall\, P \in \mathbb{K}_3[X],\ \exists\,(Q,R) \in F \times G, \quad P = Q + R$$

Autrement dit : $\mathbb{K}_3[X] = F + G$ $\qquad$ (♠).

Par ailleurs, si P appartient à $F \cap G$, alors il existe λ tel que $P = \lambda(X+1)$ (puisque P est dans G) ; et $P(0) = \lambda = 0$ (puisque P appartient à F). On en déduit que $P = 0_{\mathbb{K}_3[X]}$.

Par conséquent : $F \cap G = \left\{0_{\mathbb{K}_3[X]}\right\}$ $\qquad$ (♣).

Conclusion. D'après (♠), (♣), et la caractérisation des sev supplémentaires : $\mathbb{K}_3[X] = F \oplus G$.

Question de cours 4. — **Exercice**. Dans $E = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, on considère F le sev des matrices de E dont la somme des coefficients est nulle, et $G = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_2)$. Montrer que : $E = F \oplus G$.

Preuve. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

On obtient (par analyse-synthèse) :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} (a-b-c-d)/2 & b \\ c & (d-a-b-c)/2 \end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{\frac{a+b+c+d}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in G}$$

On a donc établi que :

$$\forall\, A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\ \exists\,(M,N) \in F \times G, \quad A = M + N$$

Autrement dit : $\mathrm{M}_2(\mathbb{R}) = F + G$ $\qquad$ (♠).

Par ailleurs, si A appartient à $F \cap G$, alors il existe λ tel que $A = \lambda I_2$ (puisque A est dans G) ; et $2\lambda = 0$ (puisque A appartient à F). On en déduit que $A = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$.

Par conséquent : $F \cap G = \left\{0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}\right\}$ $\qquad$ (♣).

Conclusion. D'après (♠), (♣), et la caractérisation des sev supplémentaires : $\mathrm{M}_2(\mathbb{R}) = F \oplus G$.

Question de cours 5. — **Exercice**. Dans $E = \mathscr{C}([0;1],\mathbb{R})$, on considère le sev F des fonctions constantes et G le sev des fonctions continues et d'intégrale nulle sur $[0;1]$. Montrer que : $E = F \oplus G$.

Preuve. **Analyse** : soit $\varphi \in E$. Supposons qu'il existe deux fonctions f et g dans E telles que : $\varphi = f+g$. Alors il existe un scalaire C tel que : $\varphi = C+g$. Puisque de plus la fonction g appartient à G, on a : $C = \int_0^1 \varphi$.

Il s'ensuit que : $\varphi = \underbrace{\int_0^1 \varphi}_{=f} + \underbrace{\left(\varphi - \int_0^1 \varphi\right)}_{=g}$.

Synthèse : soit $\varphi \in E$. On pose : $f = \int_0^1 \varphi$ et $g = \varphi - \int_0^1 \varphi$. Les fonctions f et g appartiennent clairement à F et G respectivement, et on a : $\varphi = f+g$.
On en déduit déjà que : $E = F + G$ $\quad(\spadesuit)$.

Par ailleurs, si h est une fonction appartenant à $F \cap G$, alors h est une fonction constante et d'intégrale nulle sur $[0,1]$: h est donc identiquement nulle sur $[0,1]$.
Ce qui prouve que : $F \cap G = \{0_E\}$ $\quad(\clubsuit)$.

Conclusion. D'après $(\spadesuit)$, $(\clubsuit)$, et la caractérisation des sev supplémentaires : $\mathscr{C}([0;1],\mathbb{R}) = F \bigoplus G$.

Question de cours 6. — **Propriété**. p projecteur de $E \Longrightarrow \mathrm{Im}(p) = \ker(\mathrm{id}_E - p)$

Preuve. Soit p un projecteur de E.
Soit $\overrightarrow{v} \in E$. Supposons que $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Im}(p)$.
Alors : $\exists\, \overrightarrow{u} \in E,\ \overrightarrow{v} = p(\overrightarrow{u})$. D'où : $p(\overrightarrow{v}) = p^2(\overrightarrow{u})$ et puisque p est un projecteur : $p(\overrightarrow{v}) = p(\overrightarrow{u})$. Il s'ensuit que : $p(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$, càd que : $\overrightarrow{v} \in \ker(\mathrm{id}_E - p)$. Ce qui prouve que : $\mathrm{Im}(p) \subset \ker(\mathrm{id}_E - p)$.
Etablissons l'inclusion réciproque : soit $\overrightarrow{v} \in \ker(\mathrm{id}_E - p)$.
Alors : $(\mathrm{id}_E - p)(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$, d'où : $\mathrm{id}_E(\overrightarrow{v}) - p(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$, donc : $\overrightarrow{v} = p(\overrightarrow{v})$. En particulier : $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Im}(p)$. Ce qui prouve que : $\ker(\mathrm{id}_E - p) \subset \mathrm{Im}(p)$.
Conclusion. $\ker(\mathrm{id}_E - p) = \mathrm{Im}(p)$

Question de cours 7. — **Propriété**. p projecteur de $E \Longleftrightarrow E = \ker(p) \bigoplus \ker(\mathrm{id}_E - p)$

Preuve. ➤ (preuve de $\Longrightarrow$). Supposons que p est un projecteur de E.
Soit $\overrightarrow{v}$ un élément de E.
On écrit judicieusement * : $\overrightarrow{v} = (\overrightarrow{v} - p(\overrightarrow{v})) + p(\overrightarrow{v})$ $\quad(\spadesuit)$.
Notons alors que : $p(\overrightarrow{v} - p(\overrightarrow{v})) = p(\overrightarrow{v}) - p^2(\overrightarrow{v}) = p(\overrightarrow{v}) - p(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$. † D'où : $\overrightarrow{v} - p(\overrightarrow{v}) \in \ker(p)$ $(\heartsuit)$.
Par ailleurs : $p(p(\overrightarrow{v})) = p(\overrightarrow{v})$ (puisque p est un projecteur). Il revient au même d'écrire : $p(p(\overrightarrow{v})) = \mathrm{id}_E(p(\overrightarrow{v}))$, d'où : $(p - \mathrm{id}_E)(p(\overrightarrow{v})) = \overrightarrow{0}$. Par suite : $p(\overrightarrow{v}) \in \ker(\mathrm{id}_E - p)$ $(\clubsuit)$.
On déduit de $(\spadesuit)$, $(\heartsuit)$ et $(\clubsuit)$ que : $E = \ker(p) + \ker(\mathrm{id}_E - p)$ $(\diamondsuit)$.
En outre, supposons que $\overrightarrow{w} \in \ker(p) \cap \ker(\mathrm{id}_E - p)$, alors $p(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{0}$ (puisque $\overrightarrow{w} \in \ker(p)$) et $p(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{w}$ (puisque $\overrightarrow{w} \in \ker(\mathrm{id}_E - p)$). D'où $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$. Il s'ensuit que : $\ker(p) \cap \ker(\mathrm{id}_E - p) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ $(\flat)$.
D'après $(\diamondsuit)$, $(\flat)$ et la caractérisation des sev supplémentaires, on peut conclure : $E = \ker(p) \bigoplus \ker(\mathrm{id}_E - p)$. Ce qui prouve $\Longrightarrow$

---

*. On peut le justifier par analyse-synthèse, mais on ne demande pas de le faire ici.
†. La première égalité provenant de la linéarité de p, et la seconde de l'hypothèse selon laquelle p est un projecteur.

➤ (preuve de $\Longleftarrow$). Supposons que $E = \ker(p) \bigoplus \ker(\mathrm{id}_E - p)$, et montrons que p est un projecteur.

Soit $\overrightarrow{v}$ un élément de E. Par hypothèse, il existe $\overrightarrow{f} \in \ker(p)$ et $\overrightarrow{g} \in \ker(\mathrm{id}_E - p)$ uniques tels que : $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$. On a alors : $p\left(\overrightarrow{v}\right) = p\left(\overrightarrow{f}\right) + p\left(\overrightarrow{g}\right)$, puis : $p\left(\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{g}$.

Il s'ensuit que : $p^2(\overrightarrow{v}) = p\left(\overrightarrow{g}\right) = \overrightarrow{g}$, càd : $p^2\left(\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{g}$.
Par conséquent : $\forall\, \overrightarrow{v} \in E,\ p^2\left(\overrightarrow{v}\right) = p\left(\overrightarrow{v}\right)$. Donc : $p^2 = p$, ce qui signifie que p est un projecteur, et achève la preuve l'implication $\Longleftarrow$.

Conclusion. Finalement : p projecteur de $E \Longleftrightarrow E = \ker(p) \bigoplus \ker(\mathrm{id}_E - p)$

Question de cours 8. — **Théorème**. Soient E un $\mathbb{K}$-ev, et $p \in \mathscr{L}(E)$. Si p est un projecteur de E, alors p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$

Preuve. Soit p un projecteur de E. D'après le cours, on a : $E = \ker(p) \bigoplus \ker(\mathrm{id}_E - p)$, et d'après le cours : $\ker(\mathrm{id}_E - p) = \mathrm{Im}(p)$.

Soit $\overrightarrow{v} \in E$. Alors il existe $\overrightarrow{f} \in \ker(p)$ et $\overrightarrow{g} \in \ker(\mathrm{id}_E - p) = \mathrm{Im}(p)$ uniques tels que : $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$ (♠).

On a alors : $p\left(\overrightarrow{v}\right) = p\left(\overrightarrow{f}\right) + p\left(\overrightarrow{g}\right)$, puis : $p\left(\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{g}$.

Par ailleurs, notons π la projection sur $\ker(\mathrm{id}_E - p) = \mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$ (cette projection est bien définie puisque $\ker(p)$ et $\ker(\mathrm{id}_E - p)$ sont supplémentaires dans E). Par définition (de projection), on a alors d'après (♠) : $\pi(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{g}$.
Il s'ensuit que : $\forall\, \overrightarrow{v} \in E,\ p\left(\overrightarrow{v}\right) = \pi\left(\overrightarrow{v}\right)$, ce qui prouve que $p = \pi$. Ainsi le projecteur p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$, ce qu'il fallait démontrer.