

Chapitre 20 : Espaces vectoriels et applications linéaires

1 – Espaces vectoriels

2 – Sous-espaces vectoriels

3 – Combinaisons linéaires (finies), familles génératrices

4 – Applications linéaires

5 – Noyau et image d'une application linéaire

6 – Isomorphismes et automorphismes

Définition : soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev. Un **isomorphisme** entre E et F (*resp.* **automorphisme** de E) est une application linéaire $f : E \rightarrow F$ bijective (*resp.* un endomorphisme de E bijectif). Les ev E et F sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme entre E et F .

Exemples : l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ associe le triplet de ses coefficients est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ (les ev $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^3$ sont donc isomorphes). L'application qui à toute matrice carrée de $M_n(\mathbb{K})$ associe sa transposée induit un automorphisme de $M_n(\mathbb{K})$.

Notation : $GL(E)$ est l'ensemble des automorphismes de E .

Propriétés : la composée de deux iso(auto)morphismes est un iso(auto)morphisme. Si f est un isomorphisme entre E et F , alors f^{-1} est un isomorphisme entre F et E . Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ sont deux isomorphismes, alors $g \circ f$ est un isomorphisme de E dans G , et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Corollaire : $(GL(E), \circ)$ est un groupe, appelé **groupe linéaire** de E .

7 – Sommes, sommes directes et sev supplémentaires

a – Sommes de sev

Définition : soient F et G deux sev d'un même $\mathbb{K}$ -ev E . La **somme** de F et G , notée $F + G$ est l'ensemble :

$$F + G = \left\{ \vec{v} \in E \mid \exists (\vec{f}, \vec{g}) \in F \times G, \vec{v} = \vec{f} + \vec{g} \right\}$$

Propriété : avec les notations précédentes, $F + G$ est un sev de E .

Propriété : soient $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_p$ ($n + p$) vecteurs de E . On a : $\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) + \text{Vect}(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_p) = \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_p)$.

b – Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition : deux sev F et G d'un même $\mathbb{K}$ -ev E sont dits **supplémentaires (dans E)** lorsque tout vecteur de E s'écrit de manière unique (à l'ordre près) comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G , c'est-à-dire :

$$\forall \vec{v} \in E, \exists! (\vec{f}, \vec{g}) \in F \times G, \vec{v} = \vec{f} + \vec{g}.$$

Dans ce cas, on note : $E = F \oplus G$, et on dit que E est la **somme directe** de F et de G .

Propriété (caractérisation des sev supplémentaires) : deux sev F et G de E sont supplémentaires SSI $F \cap G = \left\{ \vec{0} \right\}$ et $E = F + G$.

c – Projections et symétries

Définition : soit E un $\mathbb{K}$ -ev E ; F et G deux sev supplémentaires de E (càd tels que $E = F \oplus G$). Ainsi : $\forall \vec{v} \in E, \exists! (\vec{f}, \vec{g}) \in F \times G, \vec{v} = \vec{f} + \vec{g}$. Avec ces hypothèses et notations, la :

- **projection sur F parallèlement à G** est l'application p_F de E dans E définie en posant $p_F(\vec{v}) = \vec{f}$;
- **symétrie par rapport à F parallèlement à G** est l'application s_F de E dans E définie en posant $s_F(\vec{v}) = \vec{f} - \vec{g}$

Propriétés (des projections et symétries) : avec les hypothèses et notations de la définition précédente :

- 1) p_F est un endomorphisme de E , et $p_F^2 = p_F$. En outre : $\ker(p_F) = G$ et $\text{Im}(p_F) = F$.
- 2) s_F est un endomorphisme de E , et $s_F^2 = \text{id}_E$ (s_F est une involution). En particulier, s_F est un automorphisme de E ($s_F \in GL(E)$).

8 – Projecteurs

Définition : soit E un $\mathbb{K}$ -ev. Un **projecteur** de E est un endomorphisme p de E tel que $p^2 = p$.

Par exemple, une projection (au sens défini plus haut) est un cas particulier de projecteur. L'objet de ce paragraphe est de prouver qu'il n'y a pas d'autre situation, càd que tout projecteur est une projection.

Propriétés (des projecteurs). Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Si p est un projecteur, alors :

- 1) $\text{id}_E - p$ est un projecteur
- 2) $\text{Im}(p) = \ker(\text{id}_E - p)$
- 3) $\ker(p) = \text{Im}(\text{id}_E - p)$

Propriété (caractérisation des projecteurs). Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. LASSE :

- 1) p est un projecteur
- 2) $\text{id}_E - p$ est un projecteur
- 3) $E = \ker(p) \oplus \ker(\text{id}_E - p)$

Théorème. Soient E un $\mathbb{K}$ -ev, et $p \in \mathcal{L}(E)$. Si p est un projecteur de E , alors p est la projection sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.

NB1. La notion de famille libre (donc celle de base, donc celle de dimension) n'a pas encore été vue en cours. Ce sera l'objet du second chapitre d'algèbre linéaire, dans un futur assez proche.

NB2. D'après le déroulement de la colle 22, il semble que les questions-incontournables relatives au chapitre 20 ne soient pas encore toutes pleinement maîtrisées... Les exos de la colle de cette semaine portant sur le chapitre 20 vous permettront donc de vous entraîner de nouveau sur les "inratables" : savoir prouver que F est un sev de E , déterminer une famille génératrice, montrer qu'une application f est linéaire, que f est un endo-iso-auto-morphisme, déterminer le noyau et l'image de f , montrer que deux sev sont supplémentaires, montrer qu'un endo est un projecteur, déterminer un projeté.

QUESTIONS DE COURS

- **Propriétés :** la composée de deux isomorphismes est un isomorphisme. Si f est un isomorphisme entre E et F , alors f^{-1} est un isomorphisme entre F et E .
- **Exercice.** Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
- **Exercice.** Dans $E = \mathbb{K}_3[X]$, on considère F le sev des polynômes de E qui s'annulent en 0, et $G = \text{Vect}(X + 1)$. Montrer que : $E = F \oplus G$.
- **Exercice.** Dans $E = M_2(\mathbb{R})$, on considère F le sev des matrices de E dont la somme des coefficients est nulle, et $G = \text{Vect}(I_2)$. Montrer que : $E = F \oplus G$.

- **Exercice.** Dans $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$, on considère le sev F des fonctions constantes et G le sev des fonctions continues et d'intégrale nulle sur $[0; 1]$. Montrer que : $E = F \oplus G$.

Les questions de cours ci-dessous sont sur le principe du volontariat

- **Propriété.** p projecteur de $E \implies \text{Im}(p) = \ker(\text{id}_E - p)$
- **Propriété.** p projecteur de $E \iff E = \ker(p) \oplus \ker(\text{id}_E - p)$
- **Théorème.** Soient E un $\mathbb{K}$ -ev, et $p \in \mathcal{L}(E)$. Si p est un projecteur de E , alors p est la projection sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$